Clase 26

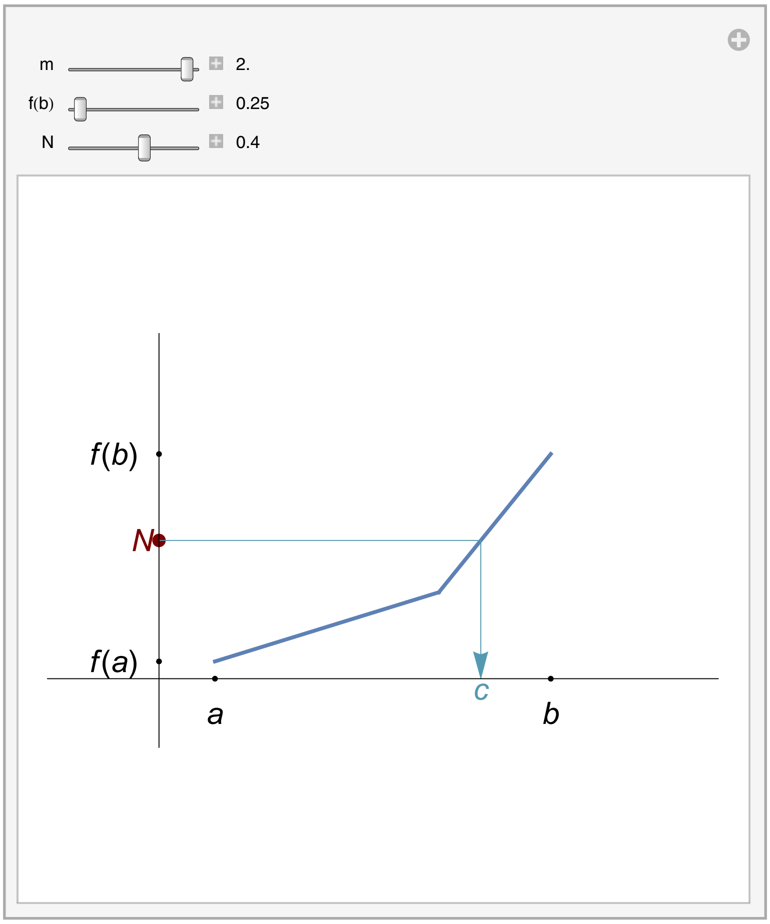
Introducción a la optimización. Teorema del valor extremo.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Teoremas para intervalos cerrados

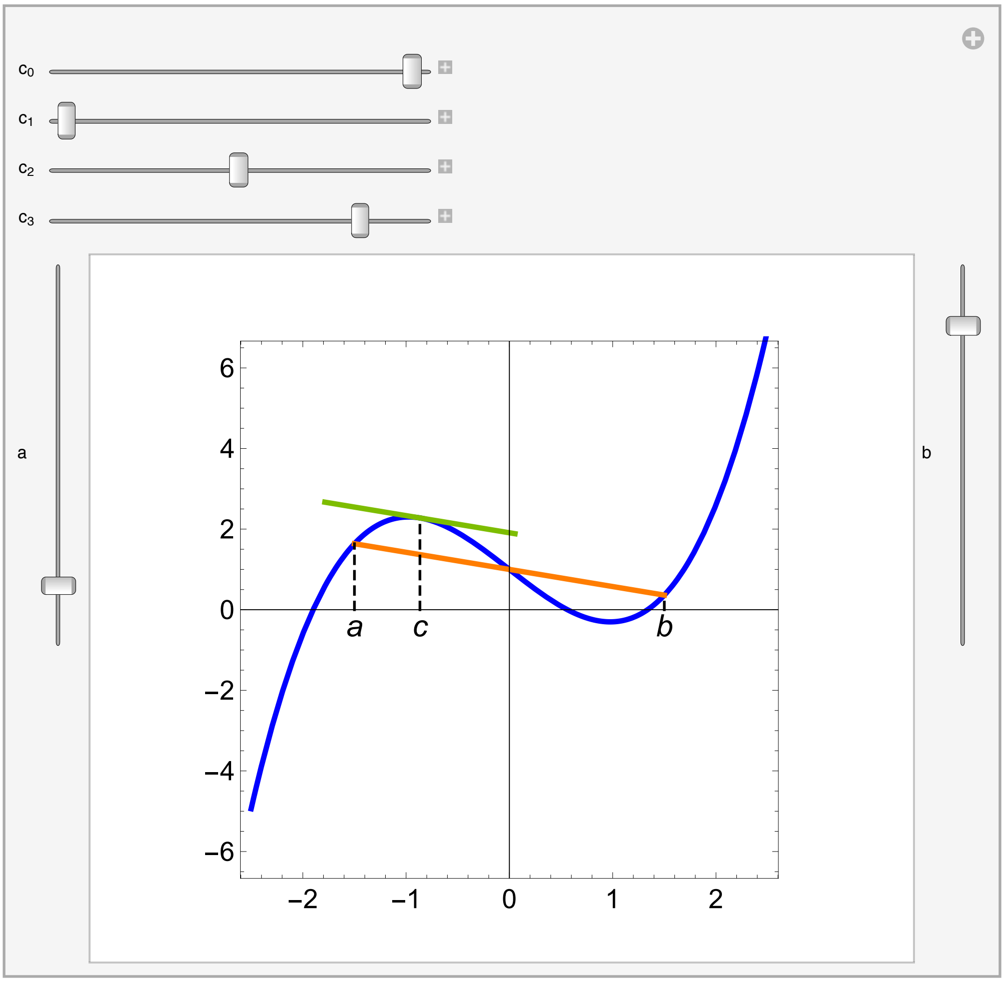
Teorema del valor intermedio

Si f es continua en $[a, b]$ y $N \in [f(a), f(b)]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = N$.



Teorema del valor medio

Si f es derivable en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



- Mostrar por qué se necesitan las hipótesis
- Significado en términos de la velocidad ...

Teorema del valor extremo

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene valores máximos y mínimos absolutos en $[a, b]$.

Mostrar por qué se necesitan las hipótesis.

Problemas

Todos los problemas de optimización se debe escribir de la forma

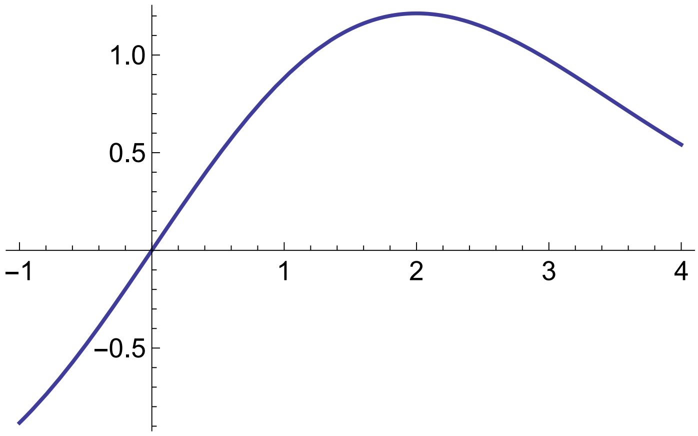
$$\max f(x), \quad x \in I$$

donde I es un intervalo. f se llama la función objetivo, x la variable, y $x \in I$ son las restricciones.

Básicos

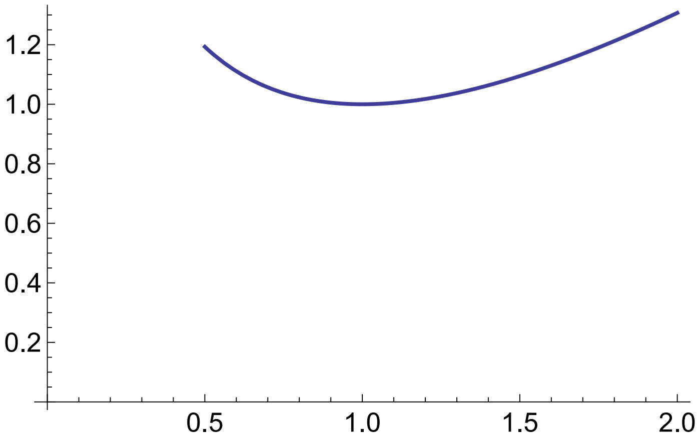
- $\max f(x) = x\, e^{-\frac{x^2}{8}}, \quad x \in [-1, 4],$

```
Plot[x e^(-x^2/8), {x, -1, 4}]
```



- min $f(x) = x - \ln(x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

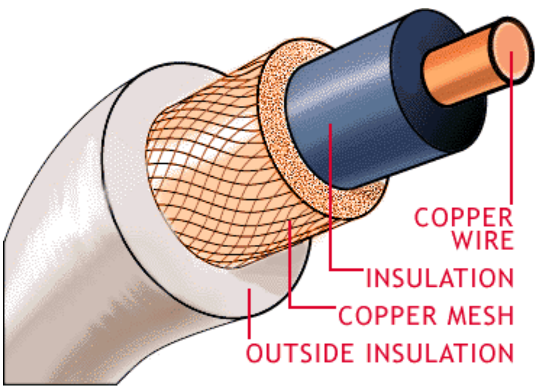
```
Plot[x - Log[x], {x, 1 / 2, 2}]
```



Dado el modelo

Cable coaxial

El voltaje que pasa por un cable coaxial depende del radio del cable interno *r* y del radio *R* de la malla de cobre externa.




```
V[r_] := 0.55 r Log[R/r];
```

Hallar el radio interno que maximiza el voltaje.

Altura máxima en caída libre

La altura en metros, respecto al suelo, de un objeto lanzado hacía arriba está dada por:

$$y(t) = -5t^2 + 4t + 1$$

donde t es el tiempo en segundos. Describir el movimiento: dónde empieza, la velocidad y la aceleración. Hallar la altura máxima

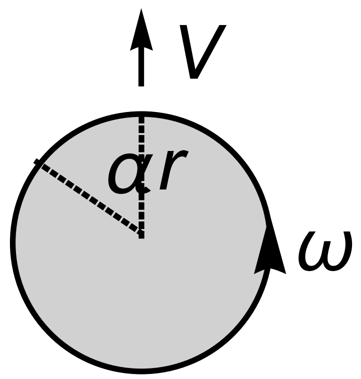
Un frisbee

Un frisbee de Ulitmate pesa $W = 175\,g$ y tiene un radio de $r = 13.5$ y momento de inercia $I = 0.7\,W r^2$, volando a velocidad V y rotando con velocidad angular $\omega = V/r$ en dirección antihoraria (forhand derecha). Hallar el punto dónde es más fácil agarrar el disco.
El momento angular es:

$$\begin{aligned}\vec{L}(\alpha) &= (0\ \ 0\ \ I\omega) + W\vec{r}(\alpha) \times (V\ \ 0\ \ 0) \\ &= (0\ \ 0\ \ I\omega) + W(0\ \ 0\ \ -V r \sin\alpha)\end{aligned}$$

Minimicemos el cuadrado de la magnitud:

$$L(\alpha) = (I\omega - V W r \sin(\alpha))^2 = (0.7\,W V r - W V r \sin(\alpha))^2 = W^2 V^2 r^2 (0.7 - \sin(\alpha))^2,\ \ \alpha \in [0, 2\pi].$$



Velocidad óptima en bicicleta

Suponga que quiere montar bicicleta una ditancia $L = 5000\,m$, en una carretera con ángulo θ, a velocidad constante v. Queremos hallar la velocidad óptima para hacer este viaje. Es decir, la velocidad que hace que usted gaste la menor cantidad de energía. La energía consumida tiene cuatro componentes:

- La tasa metabolica basal R multiplicada por el tiempo de viaje:

$$E_0 = R \times \text{tiempo} = R\,\tfrac{V}{L},$$

$$R = (88.4 + 13.4\,\text{peso} + 4.8\,\text{altura} - 5.68\,\text{edad})\,\frac{\text{cal}}{\text{dia}}\ \frac{4.186\,\text{Joul}}{86\,400\,s} = 0.07963\,W$$

- La energía que se gasta subiendo su peso en contra de la pendiente:

$$E_s = W\sin(\theta)\,V$$

- La energía que se gasta por las pérdidas por fricción contra el suelo:

$$E_f = \mu_f W \cos(\theta)\,V,\ \ \mu_f \approx 0.0053$$

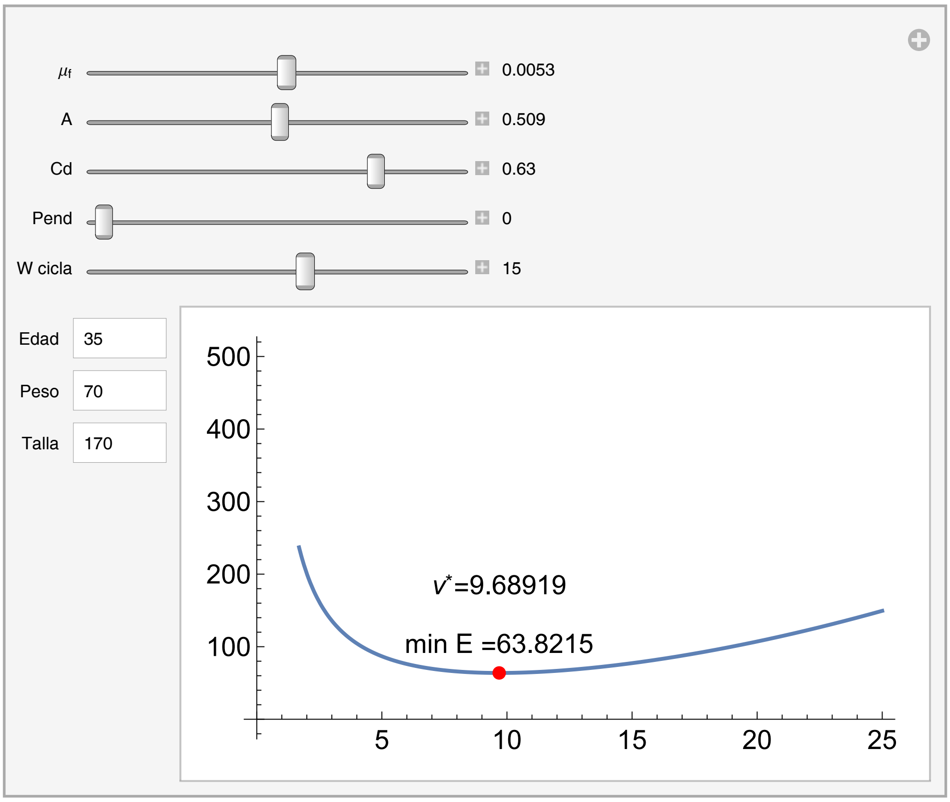
- La energía que se gasta por resistencia al aire depende de la densidad del aire $\rho = 1.22\,\mathrm{Kg}/m^3$, el coeficiente de arrastre $C_d \approx 0.63$, y el área transversal A de la persona + bicicleta.

$$E_a = \frac{1}{2}\, C_d\, \rho\, A\, V^2$$

La energía total depende de la velocidad:

$$E(v) = R\,\frac{L}{v} + W\,V\,(\mu_f \cos(\theta) + \sin(\theta)) + \frac{1}{2}\,\rho\, C_d\, A\, V^2.$$

```
En[v_] := R L/v + W v (μr Cos[θ] + Sin[θ]) + 1/2 Cd A ρ v^2;
```



Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.