Clase 11

Límite de una función: definición intuitiva, ejemplos gráficos, ejemplos con tablas de valores, límites laterales, ejemplos gráficos.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Por qué estudiamos los límites?

La noción de límte es central en gran parte de la matemática moderna y en particular, el límite es el concepto base del cálculo, y en términos de un límite se definen: la derivada, la integral, las series ....

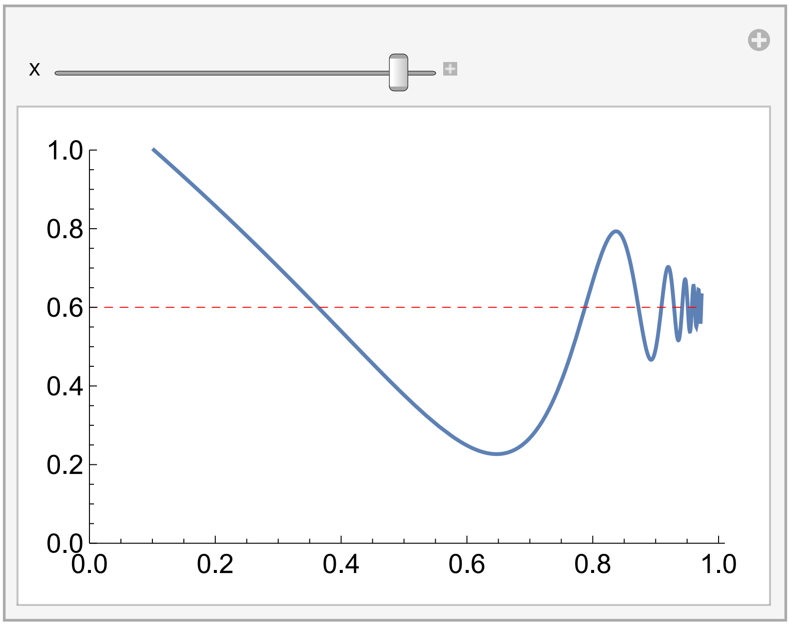
El concepto moderno de límite se lo debemos a Cauchy y permitió el verdadero comienzo del tratamiento riguroso del cálculo.

La pregunta básica es: cómo se pueden aproximar las cosas?

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un número ó ∞

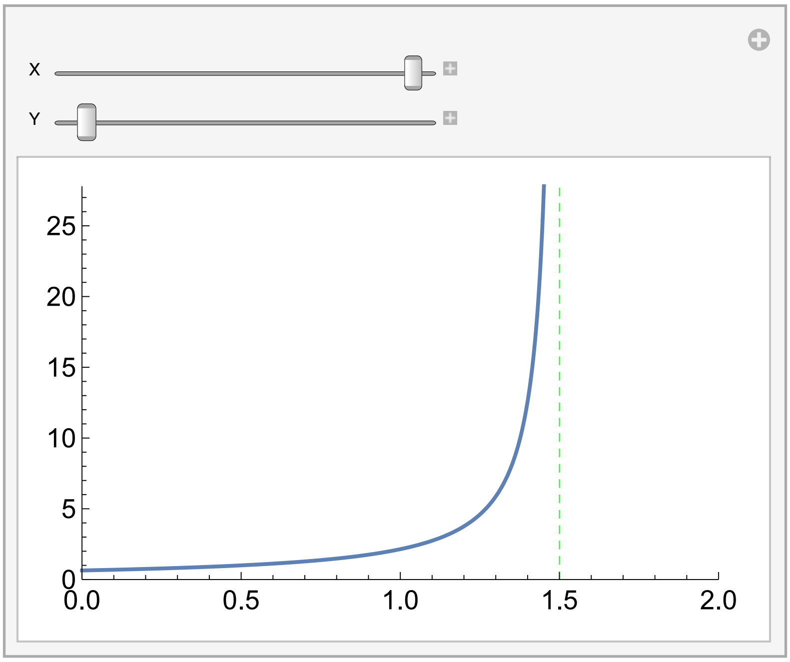
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0.6$$

Out[60]=



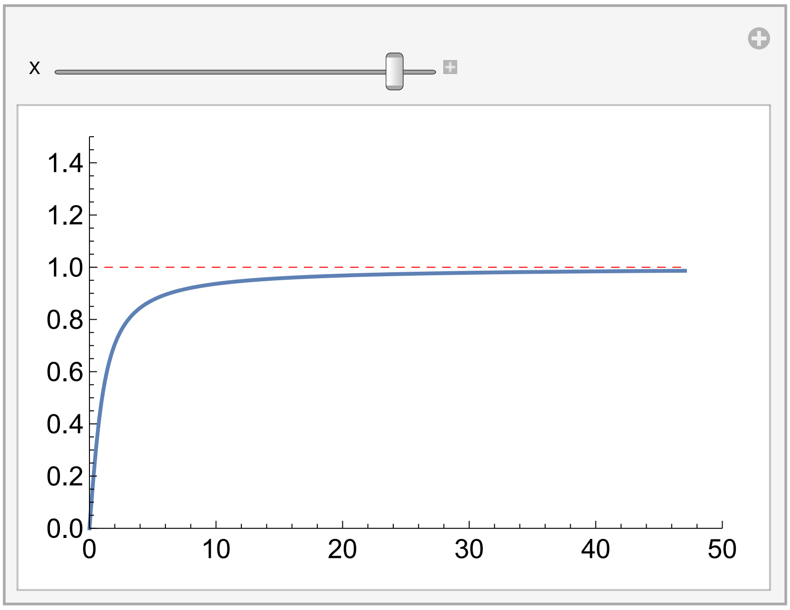
$$\lim_{x \to 1.5} f(x) = +\infty$$

Out[61]=



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

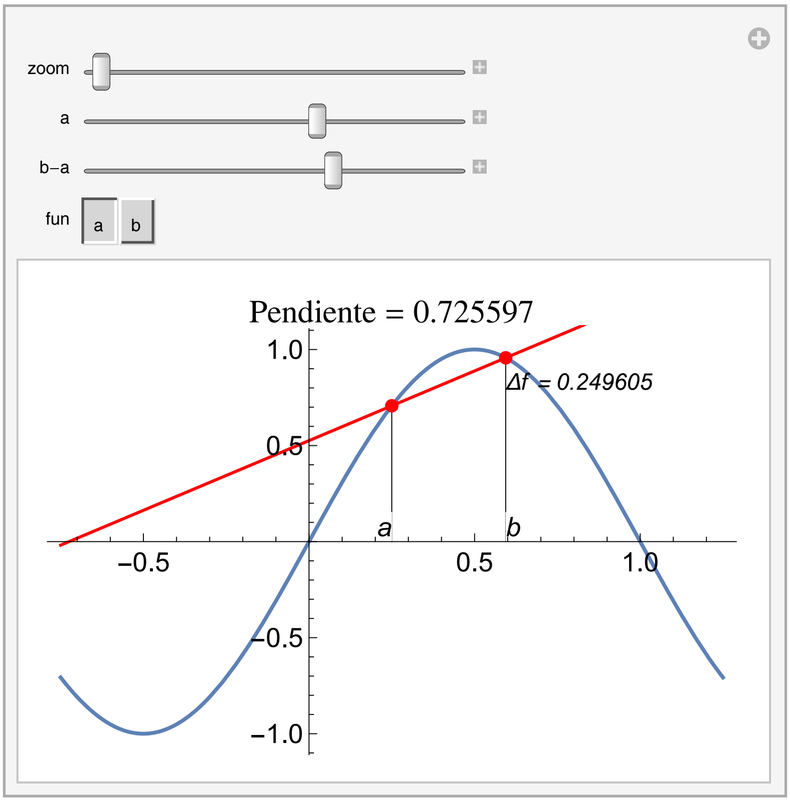
Out[62]=



La derivada de una función es el límite de las pendientes

$$f'(a) = \lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Out[63]=



Una suma infinita se aproxima a un número

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Out[64]=

Número de términos

$$\sum_{k=1}^{22} \frac{1}{2^k} =$$

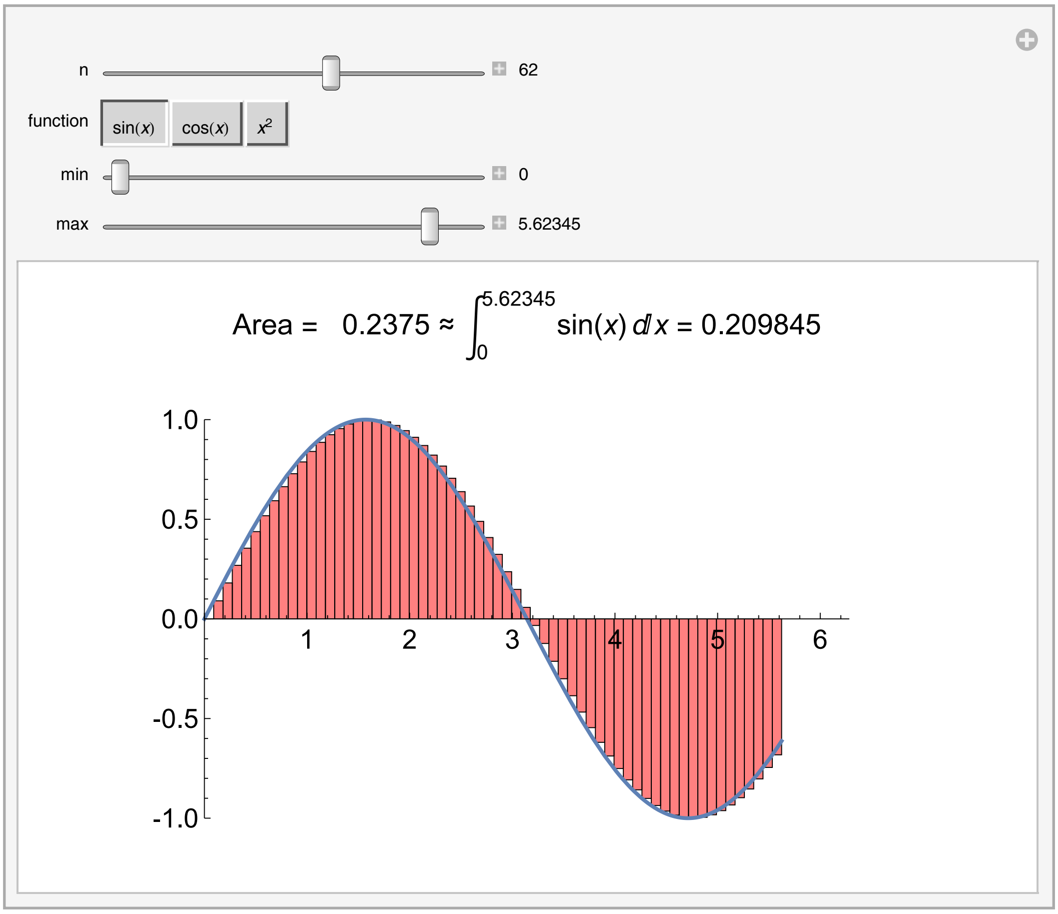
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{2048}+\frac{1}{4096}+\frac{1}{8192}+\frac{1}{16384}+$$

$$\frac{1}{32768}+\frac{1}{65536}+\frac{1}{131072}+\frac{1}{262144}+\frac{1}{524288}+\frac{1}{1048576}+\ldots = 1.$$

La integral definida es un límite de sumas

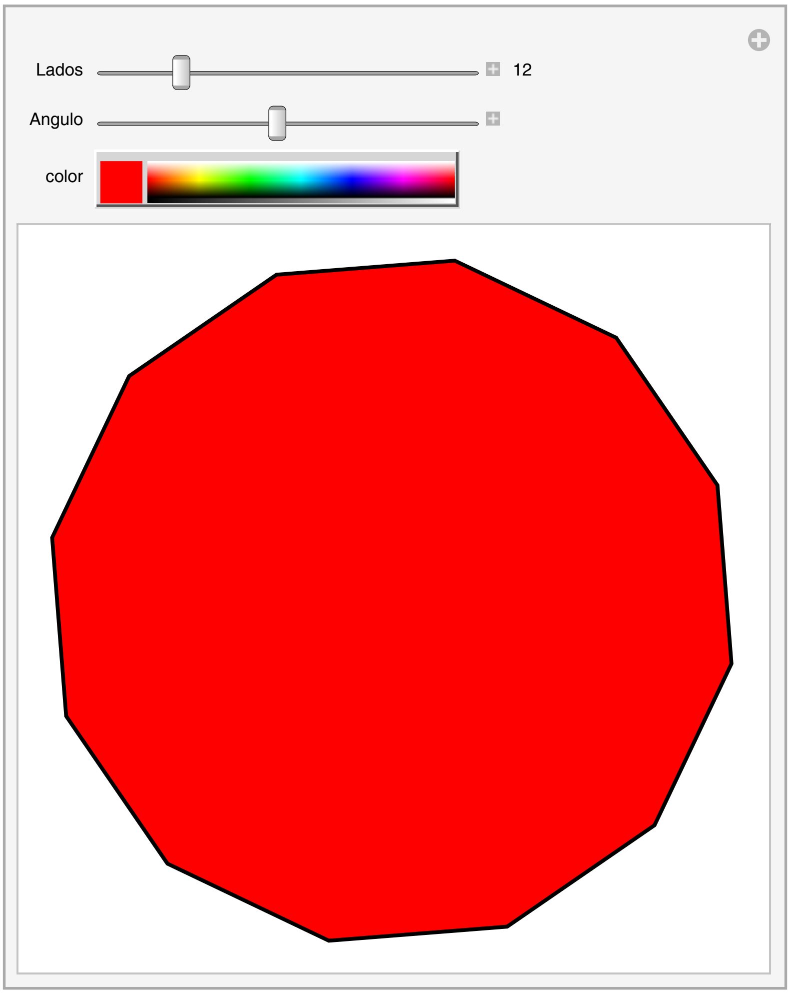
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{(b-a)/\Delta} f(a+k\,\Delta)\,\Delta$$

Out[65]=


n
62
function
sin(x)
cos(x)
x2
min
0
max
5.62345
Area = 0.2375 ≈ ∫0^5.62345 sin(x) dx = 0.209845
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
1
2
3
4
5
6

Las geometría se pueden aproximar

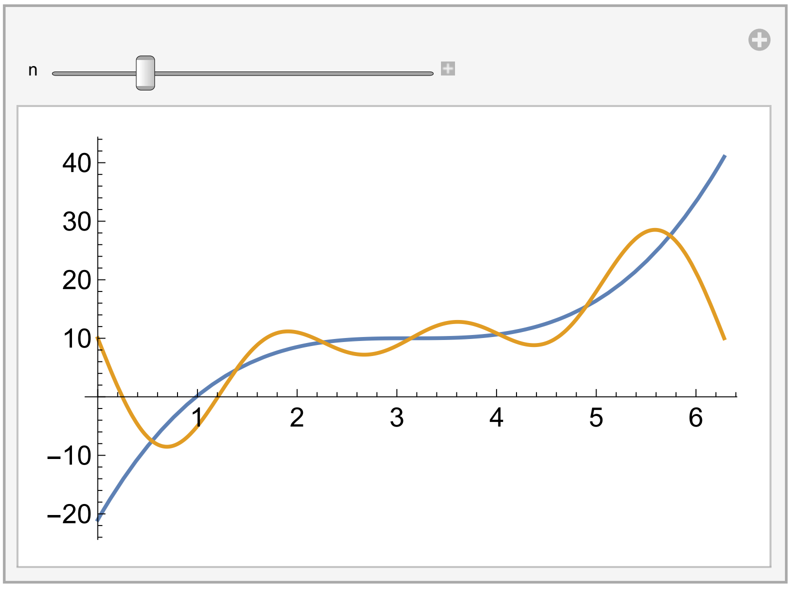
Out[66]=



Funciones enteras se pueden aproximar

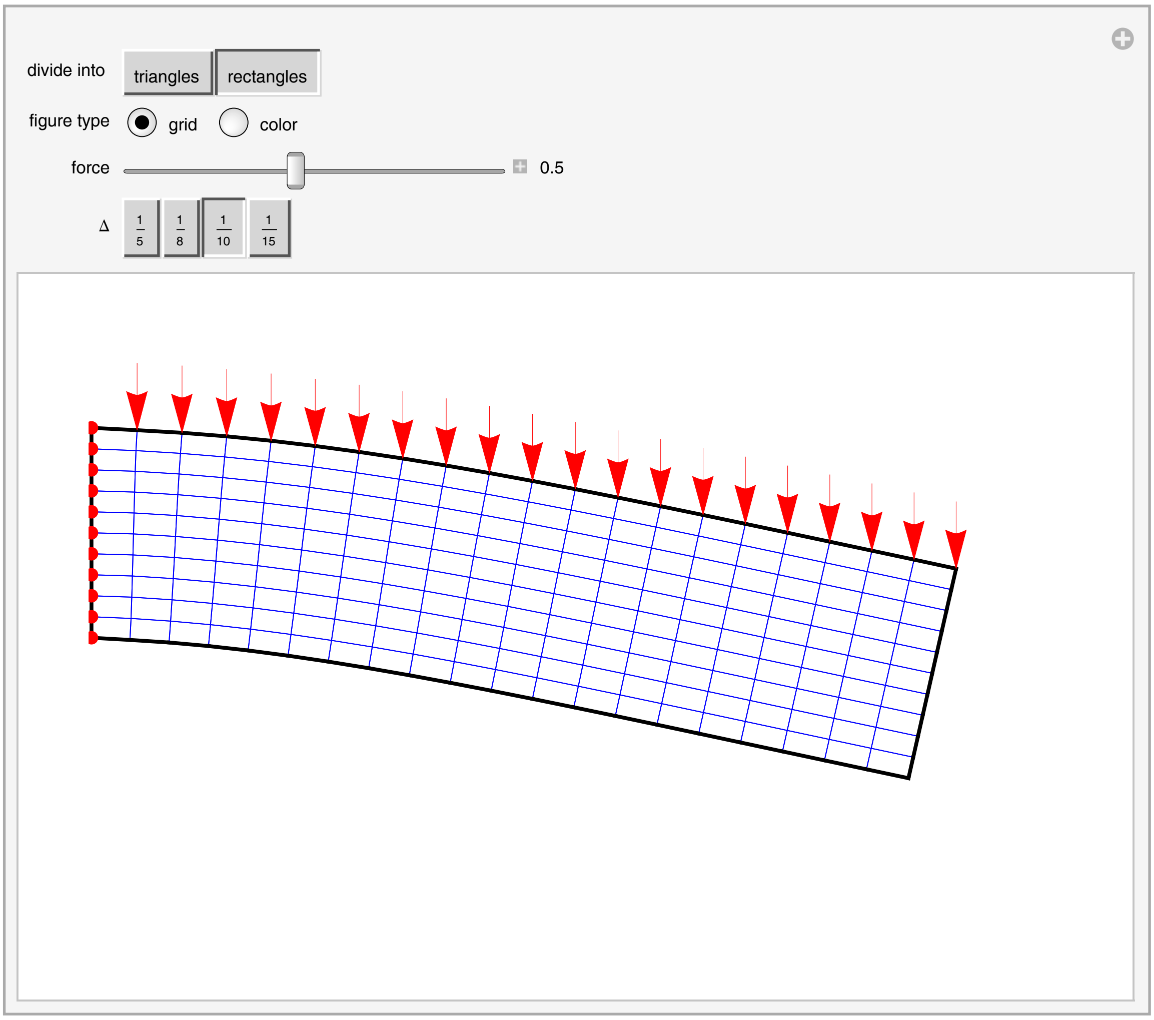
$$f(x) = a_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(k\,x) + b_k \cos(k\,x)$$

Out[80]=



Los modelos se resuelven aproximadamente y se toma el límite cuando la resolución aumenta

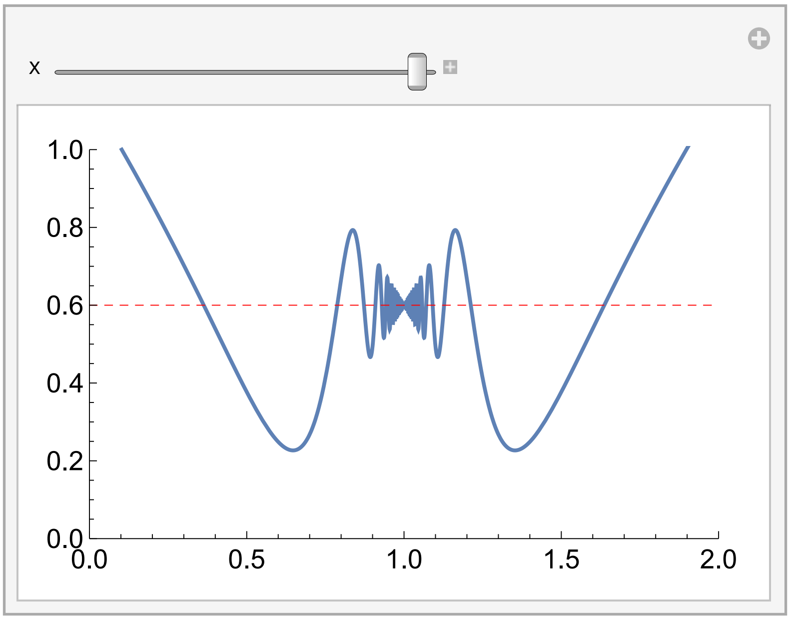
Out[68]=



Definición de límite de una función

Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a, se escribe que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Para que esto pase, los valores de $f(x)$ deben ser arbirtrariamente cercanos a L cuando x es suficientemente cercano a a.

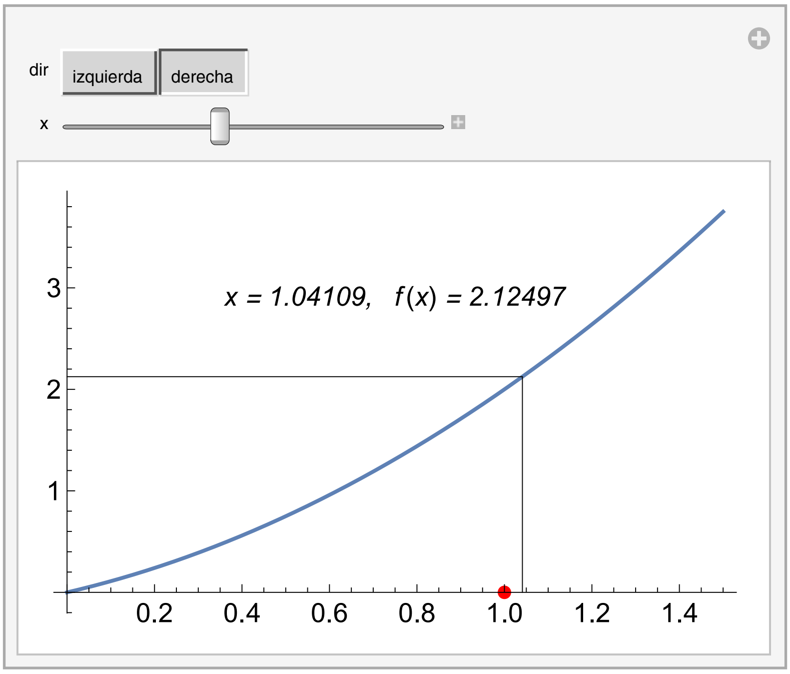
Out[69]=



Es muy simple

La función $f(x) = x + x^2$ toma valores muy cercanos a 2 cuando x se acerca a 1, por la derecha y por la izquierda. Luego $\lim_{x \to 1} x + x^2 = 2$.

Out[76]=

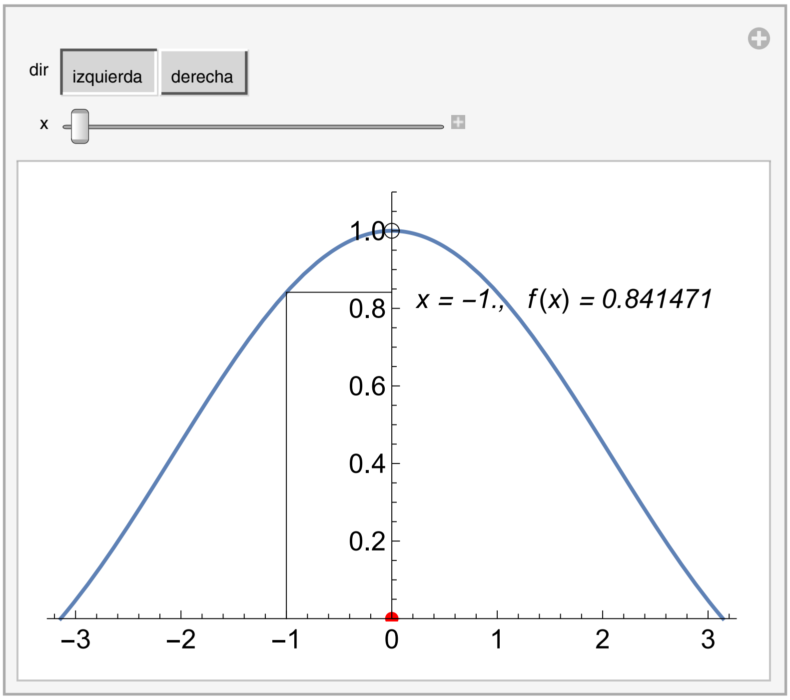


El valor de $f(b)$ no tiene nada que ver con el límite de $f(x)$ cuando x tiende a b!!!

No importa incluso si f está definida en b (o sea, b no tiene que estar en Ran$f$) para uno calcular $\lim_{x \to b} f(x)$. Esto pasa en las funciones a continuación, sinembargo en ambos casos el límite existe.

Qué le pasa a $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ cuando x es muy cercano a 0?

Out[71]=



En una tabla de valores también se puede observar la tendencia:

In[72]:= `FunctionTable[x, Sin[#]/# &, -0.1, 0.1, 0.01]`

Out[72]//TableForm=

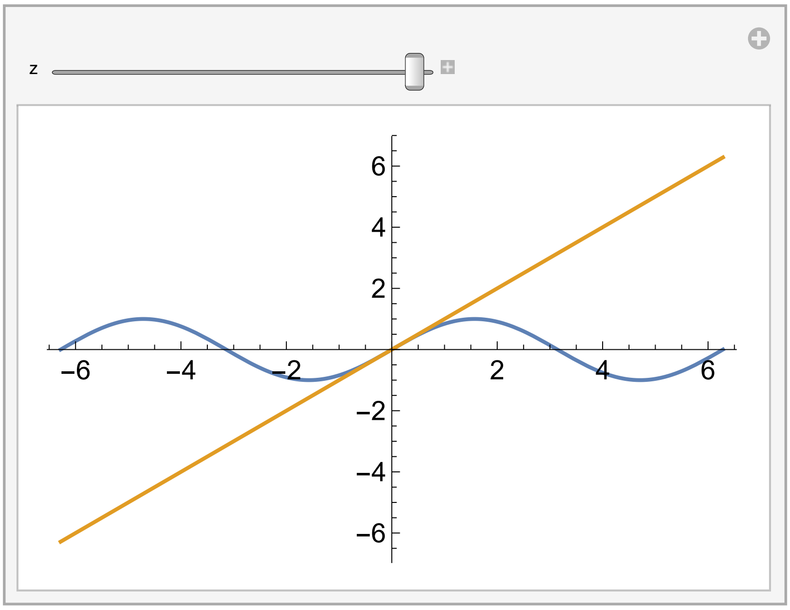
x	$\frac{\text{Sin}[x]}{x}$
-0.1	0.998334
-0.09	0.998651
-0.08	0.998934
-0.07	0.999184
-0.06	0.9994
-0.05	0.999583
-0.04	0.999733
-0.03	0.99985
-0.02	0.999933
-0.01	0.999983
0.	Indeterminate
0.01	0.999983
0.02	0.999933
0.03	0.99985
0.04	0.999733
0.05	0.999583
0.06	0.9994
0.07	0.999184
0.08	0.998934
0.09	0.998651
0.1	0.998334

Primera aplicación:

Siempre que calculemos un límite, descubrimos algo sobre los valores aproximados de una función. En este caso:

$$\text{Como } \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1, \text{ entonces } \text{sen}(x) \approx x \text{ cuando } x \approx 0$$

Out[78]=



La definición rigurosa de Límite

Sea f una función y a un número no necesariamente en Dom(f). La idea es definir el siguiente enunciado:

$$\text{Lim}_{x\to a} f(x) = L$$

de manera tal que signifique lo siguiente:

"Si $x \in$ Dom(f) y es suficientemente cercano a a, entonces los valores de $f(x)$ serán tan cercanos a L como uno quiera"

El truco está en escribir en lenguaje matemático, lo que queremos decir por "tan cercanos a L como uno quiera", y "suficientemente cercano a a".

Definición:

Decimos que $\text{Lim}_{x\to a} f(x) = L$ si:

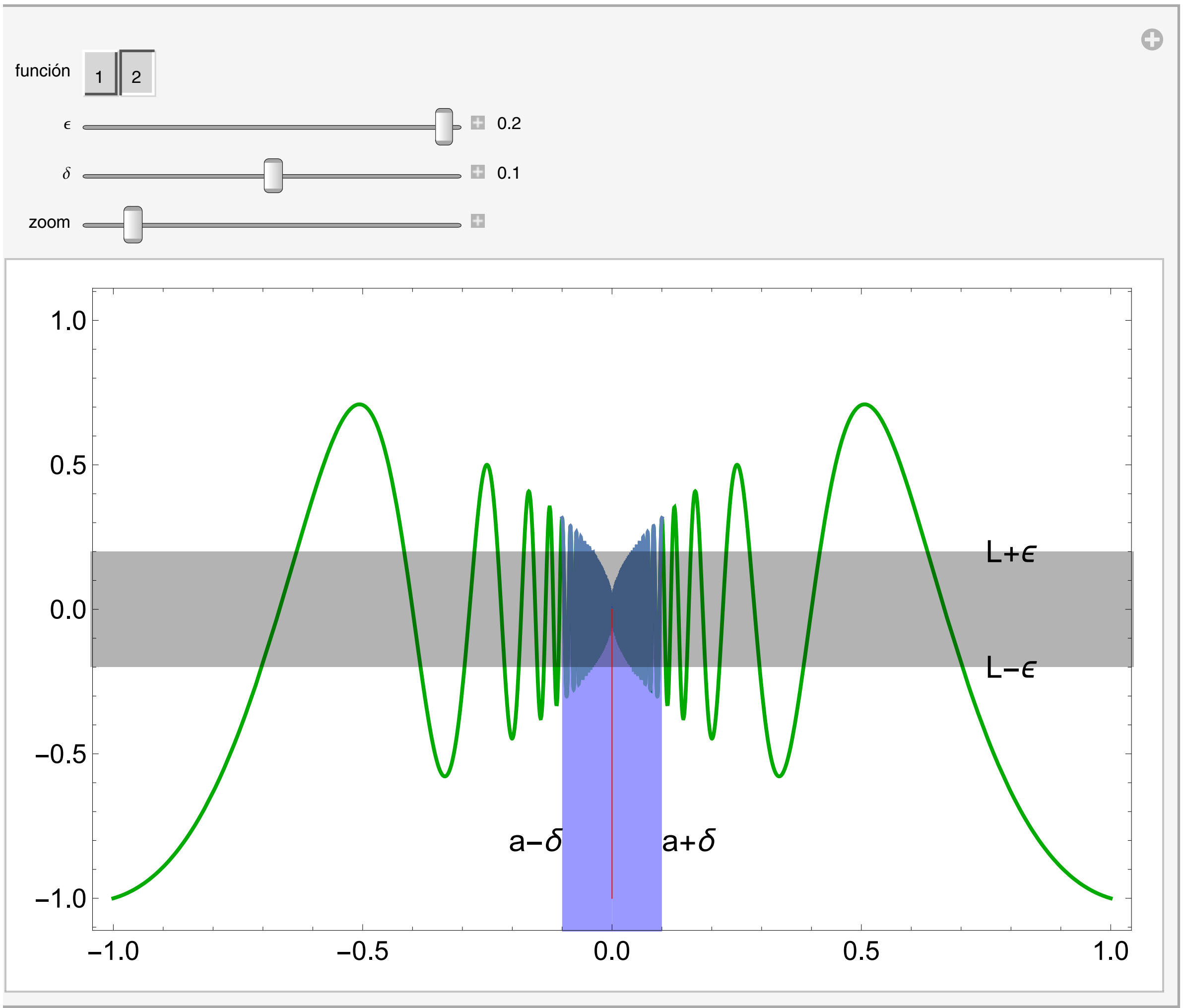
dado cualquier pequeño $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que si tomamos $x \in$ Dom(f) con $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Notas:

- Que el límite de f cuando x tiende a a sea L, significa que dado cualquier ϵ, puedo encontrar tal δ. En general, entre mas pequeño sea ϵ, mas pequeño será δ.
- La desigualdad en rojo significa que $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$. Como ϵ es cualquiera, entonces esto quiere decir que el valor de $f(x)$ es tan cercano a L como uno quiera.
- Como la desigualdad de azul dice que $x \in (a - \delta, a + \delta)$ entonces su significado es precisamente que x debe ser suficientemente cercano a a.

La siguiente demostración muestra gráficamente el juego de "dado $\epsilon > 0$ cualquiera", encontrar "$\delta > 0$ suficientemente pequeño" tal que **$x \in$ Dom(f) y $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - L| < \epsilon$.**

Out[73]=



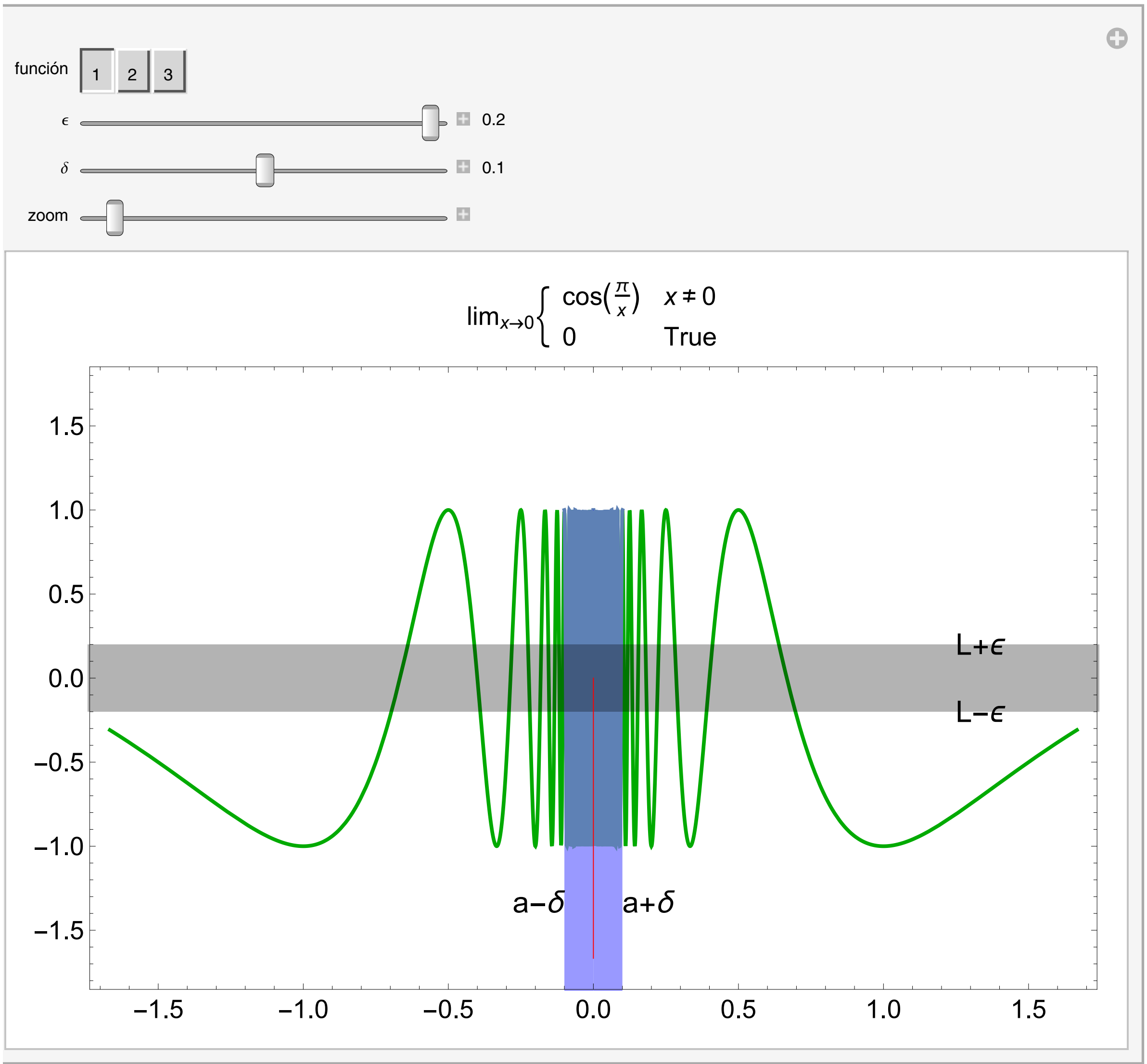
Límites laterales: Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a por la derecha, o sea, valores mayores que a, se escribe que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$. Si $f(x)$ se aproxima a l cuando x se aproxima a a por la izquierda, o sea, valores menores que a, se escribe que $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$. Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a **existe** si $L = l$ y este número se denota por

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Cúando un límite no existe?

- No hay función que evaluar. Por ejemplo $\lim_{x \to 0} \sqrt{x - 1}$
- La función simplemente no se aproxima a un número. Por ejemplo $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$. O $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ (ver función 1 en la demostración de abajo).
- Si los límites laterales existen, pero no son iguales (ver función 2 en la demostración).

Out[74]=



Atención. Aunque $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ no existe, $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ si existe y es igual a cero. Verificar la definición con la funcíon 3 en la demostración arriba.

En la siguiente tabla se observa cómo los valores de la función $\cos(\pi/x)$ no se aproximan a ningún numero a medida que x se acerca a cero.

In[75]:= **FunctionTable[x, Cos[$\frac{\pi}{\#}$] &, -0.01, 0.01, 0.0005]**

Out[75]//TableForm=

x	Cos[$\frac{\pi}{x}$]
-0.01	1.
-0.0095	-0.677282
-0.009	-0.939693
-0.0085	0.445738
-0.008	-1.
-0.0075	-0.5
-0.007	-0.900969
-0.0065	0.885456
-0.006	-0.5
-0.0055	0.841254
-0.005	1.
-0.0045	0.766044
-0.004	1.
-0.0035	0.62349
-0.003	-0.5
-0.0025	1.
-0.002	1.
-0.0015	-0.5
-0.001	1.
-0.0005	1.
0.	Indeterminate
0.0005	1.
0.001	1.
0.0015	-0.5
0.002	1.
0.0025	1.
0.003	-0.5
0.0035	0.62349
0.004	1.
0.0045	0.766044
0.005	1.
0.0055	0.841254
0.006	-0.5
0.0065	0.885456
0.007	-0.900969
0.0075	-0.5
0.008	-1.
0.0085	0.445738
0.009	-0.939693
0.0095	-0.677282
0.01	1.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.