

# Clase 17

## Derivadas superiores: concavidad

Jorge Ramirez,  
Escuela de Matemáticas,  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.  
Todos los derechos reservados.

## Derivadas superiores

$$(f')'(a) = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) (a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a) - f'(a+h)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = f''(a) = \frac{d^2 f}{dx^2} (a)$$

Las unidades de  $f''$  son:

$$[f''(x)] = \frac{[f'(x)]}{[x]} = \frac{[f(x)]/[x]}{[x]} = \frac{[f(x)]}{[x]^2}$$

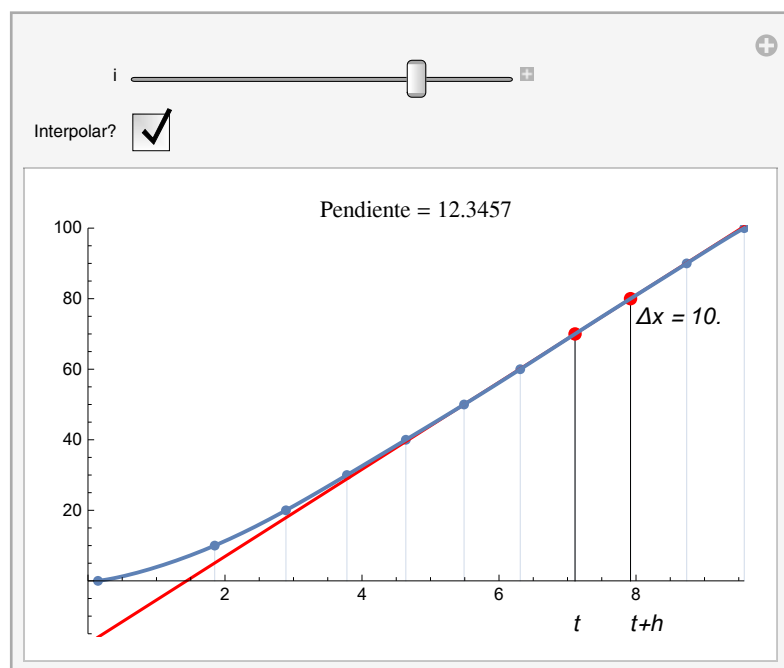
$f''(a)$  es la tasa de cambio de la tasa de cambio con respecto a  $x$ , cuando  $x = a$ .

### Ejemplo 1: aceleración

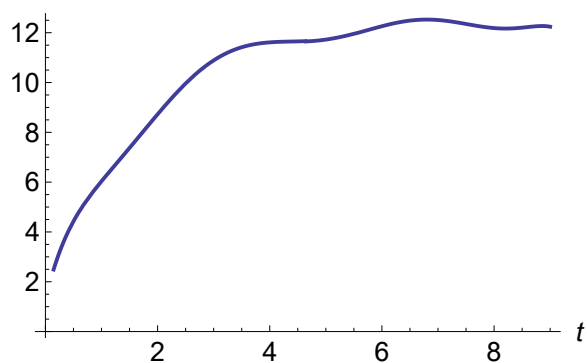
**Ejemplo:** Si  $y(t)$  es la distancia recorrida en metros, como función del tiempo  $t$  en segundos, las unidades de  $y''(t)$  son  $m/s^2$ . Es la tasa a la cual cambia la velocidad.

Consideremos la carrera de Usain Bolt:

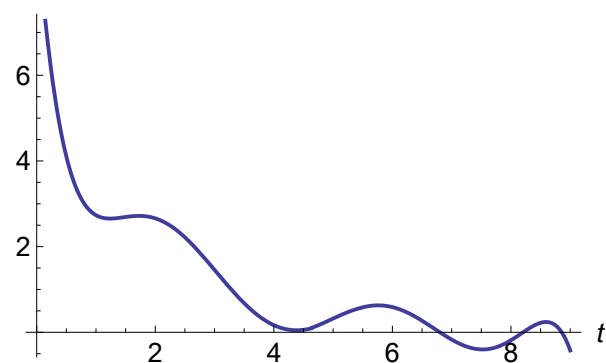
Tiempo	Distancia
0.146	0
1.85	10
2.89	20
3.78	30
4.64	40
5.49	50
6.31	60
7.11	70
7.92	80
8.74	90
9.58	100



velocidad



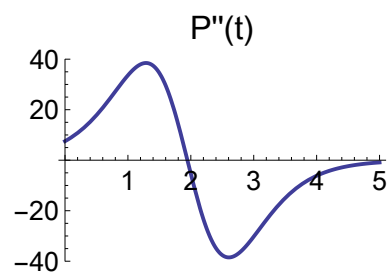
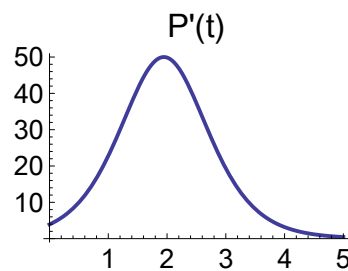
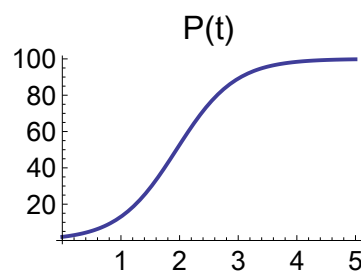
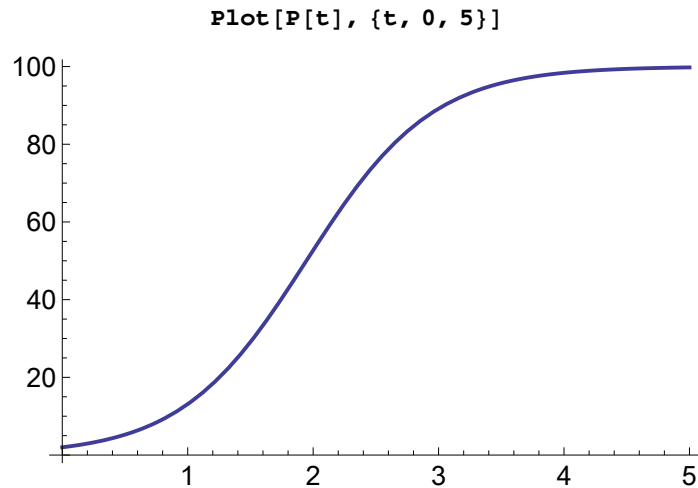
aceleración



## Ejemplo 2: la función S

Modelo de población. Graficar e interpretar  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$ . Hallar cuándo  $P'' = 0$ .

$$P[t_] := \frac{100 e^{2t}}{49 + e^{2t}};$$

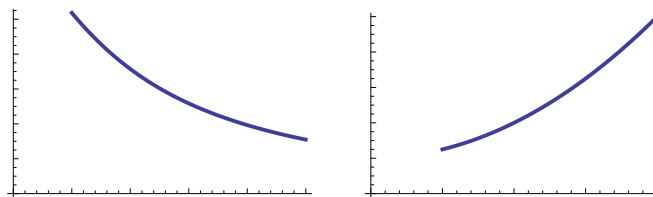


Usar  $P'(1.2)$  y  $P''(1.5)$  para hacer estimativos de  $P(1.5)$  y  $P'(1.5)$ . Notar que el error depende de la segunda derivada:

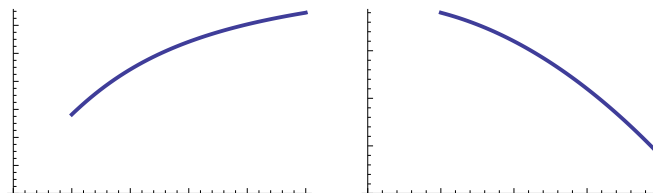
$$\left| P(x+h) - (P(x) + P'(x)h) \right| \leq \frac{1}{2} h^2 \max_{z \in (x, x+h)} |P''(z)|$$

## La segunda derivada y la concavidad

$$f'' > 0 \Rightarrow f' \text{ crece} \Rightarrow f \text{ es cóncava hacia arriba}$$

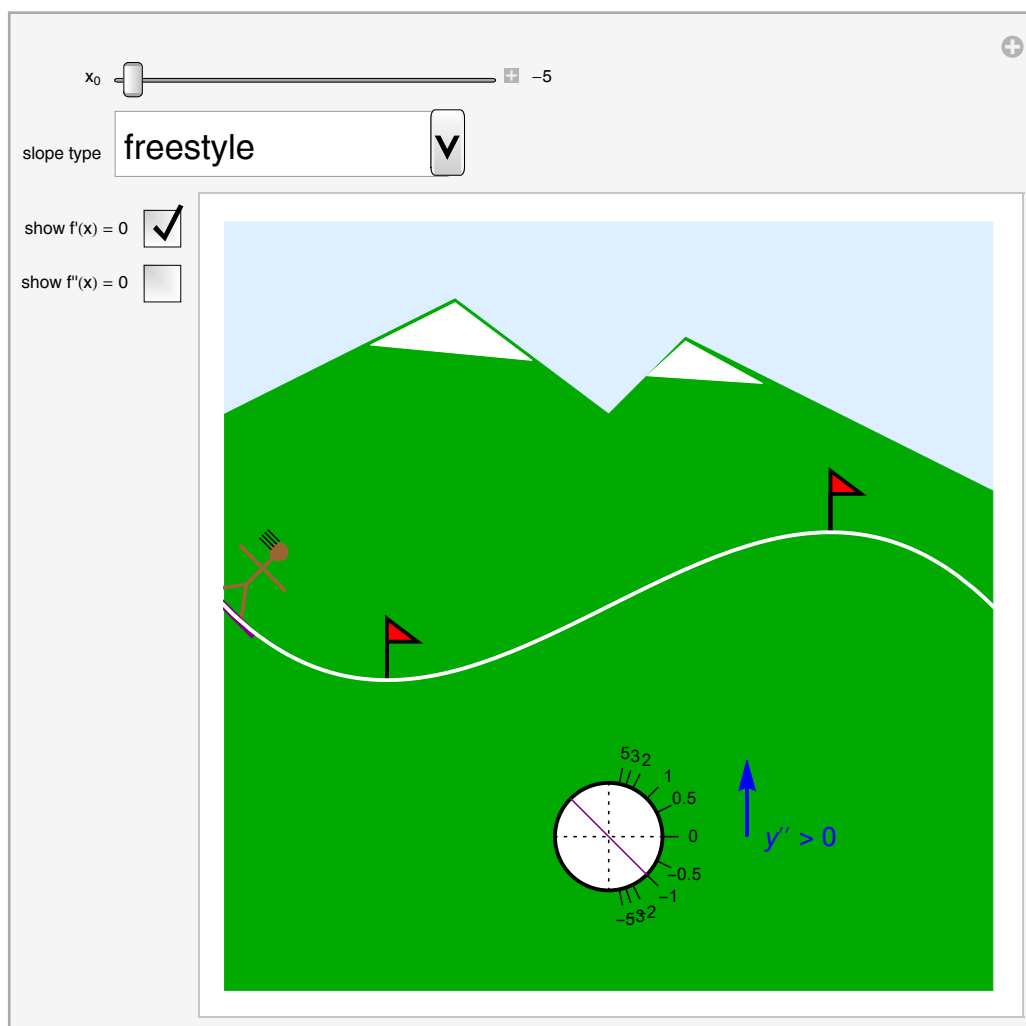


$f'' < 0 \Rightarrow f' \text{ decrece} \Rightarrow f \text{ es cóncava hacia abajo}$



### Punto de inflexión.

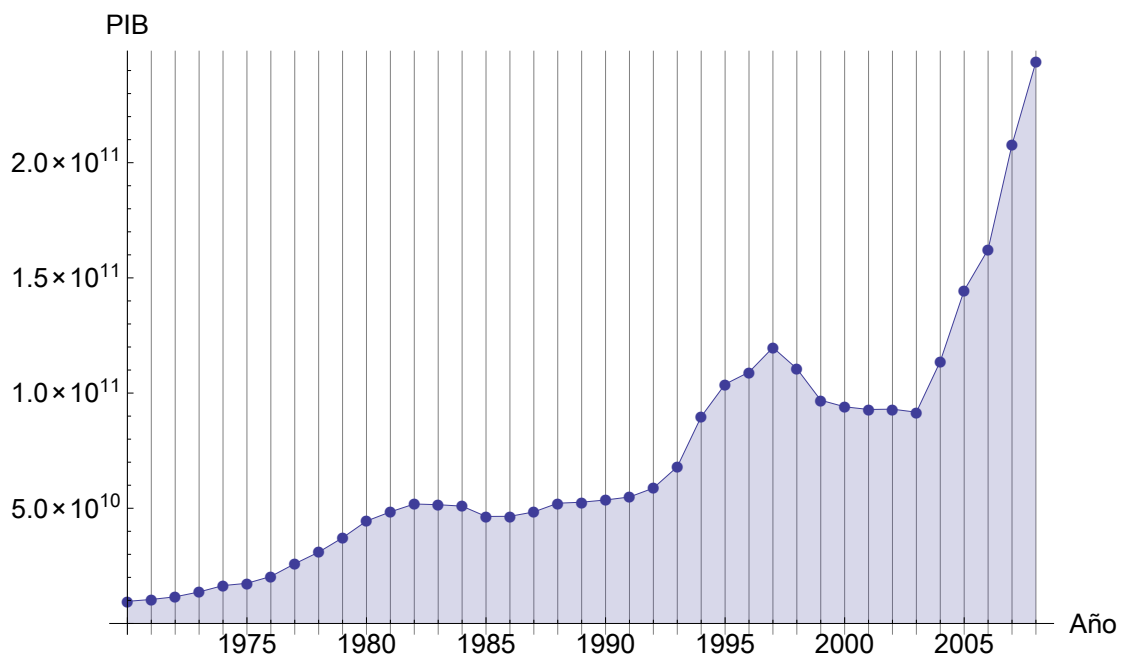
Decimos que la gráfica de  $f$  tiene un punto de inflexión en  $x = a$  si la gráfica cambia de concavidad en ese punto. Por ejemplo, ocurre mucho que los puntos de inflexión corresponden con valores de  $x$  donde  $f''(x) = 0$ .



## La segunda derivada a partir de tablas

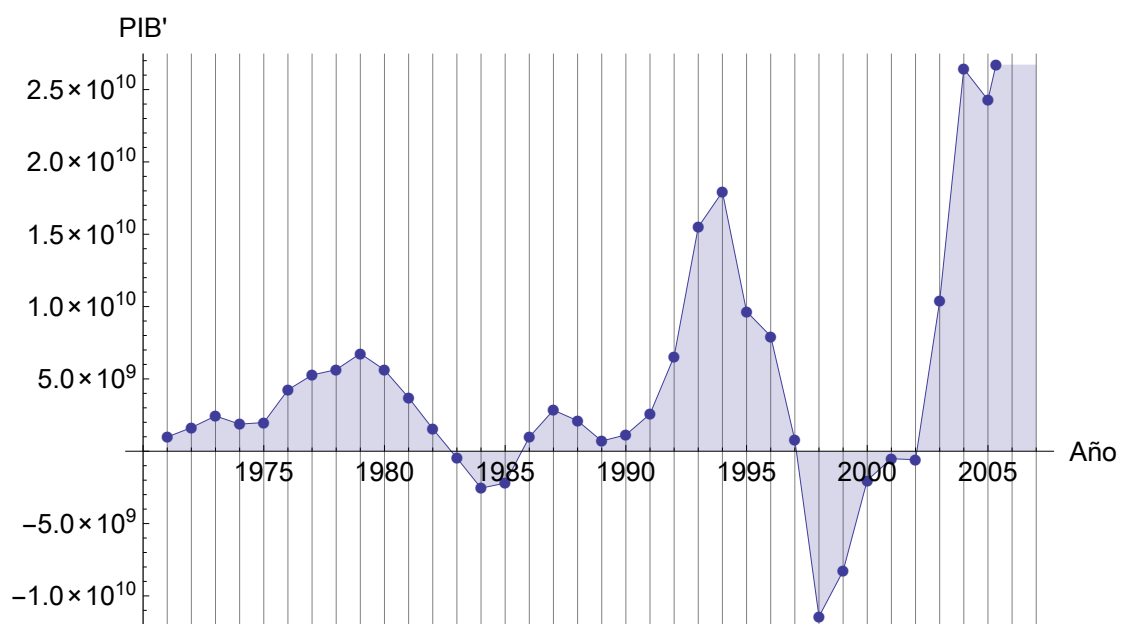
Producto interno bruto en Colombia. Qué significan PIB' y PIB''?

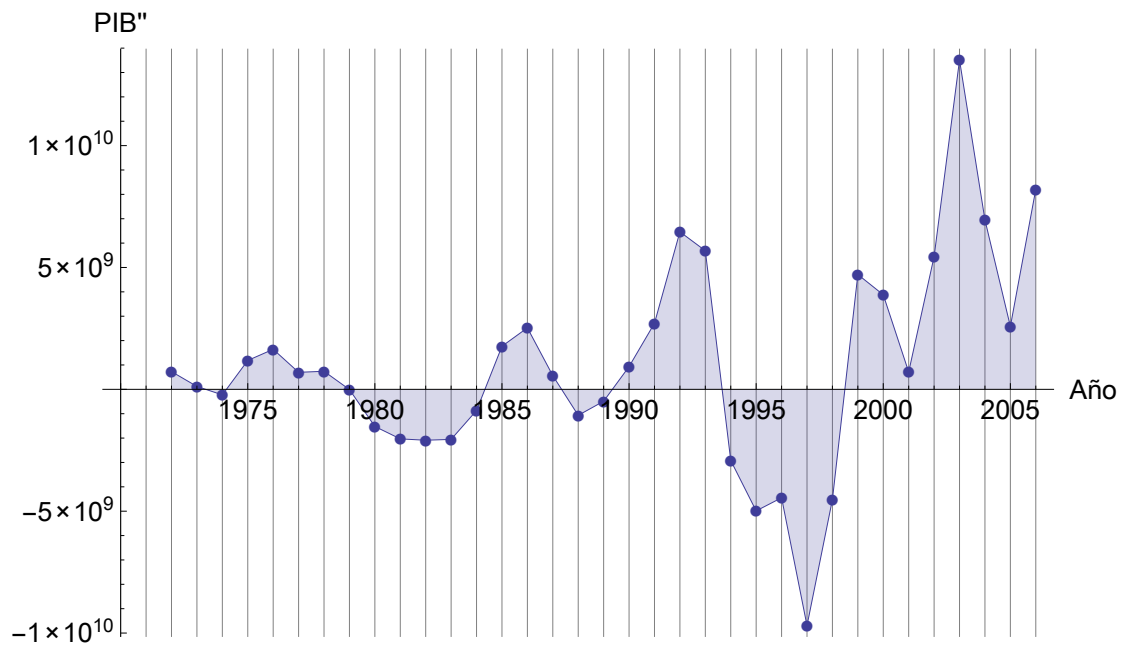
Año	PIB $\times 10^{10}$
1970	0.95986
1971	1.04175
1972	1.1566
1973	1.36837
1974	1.64438
1975	1.74293
1976	2.04102
1977	2.5915
1978	3.09483
1979	3.71942
1980	4.44521
1981	4.84386
1982	5.18626
1983	5.15506
1984	5.09219
1985	4.64469
1986	4.65099
1987	4.84118
1988	5.21917
1989	5.26301
1990	5.36062
1991	5.48924
1992	5.87526
1993	6.80027
1994	8.97524
1995	10.3862
1996	10.9077
1997	11.977
1998	11.0611
1999	9.68993
2000	9.40531
2001	9.28768
2002	9.30156
2003	9.17024
2004	11.3774
2005	14.458
2006	16.2347
2007	20.7786
2008	24.3744



```
DMedio[F_, t_] := Table[ $\frac{F[[i+1]] - F[[i-1]]}{t[[i+1]] - t[[i-1]]}$ , {i, 2, Length[F] - 1}];
```

```
DAttras[F_, t_] := Table[ $\frac{F[[i]] - F[[i-1]]}{t[[i]] - t[[i-1]]}$ , {i, 2, Length[F]}];
```





### Ejemplo

#### Un titular de noticias dice:

“en el período 2011-2012, la tasa a la cual viene disminuyendo el número de homicidios por año en Medellín, cayó un 52% respecto al período 2010-2011”.

Eso es bueno o malo?

**homs** = {654, 2186, 2019, 1649, 1473};

**TTs** = {2008, 2009, 2010, 2011, 2012};

Año	Hom/año	(Hom/año) / año	(Hom/año) / año/año
2008	654		
2009	2186	1532	
2010	2019	-167	-1699
2011	1649	-370	-203
2012	1473	-176	194

Jorge Ramirez,  
Escuela de Matemáticas,  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.  
Todos los derechos reservados.