Clase 7

Función inversa: función uno a uno, prueba de la recta horizontal, definición de función inversa, gráfica de la función inversa

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Función inversa

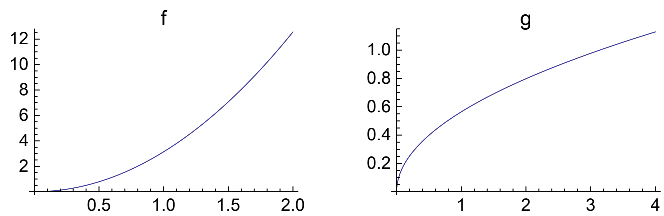
Recordar $y = f(x)$ significa que y se puede calcular, estimar o predecir a partir del valor de x. **Se podrá predecir x a partir de y?**

Motivación 1

Sea A el área de un círculo y r su radio. Entonces

$$A = f(r) = \pi r^2, \;\; r = g(A) = \sqrt{A/\pi}$$

Mostrar en las gráficas:



$$\text{Se cumple que: } \quad A = f(r) \Longleftrightarrow r = g(A)$$

Decimos que f es la función inversa de g y viceversa.

Motivación 2

La temperatura del aire sobre Medellín se puede predecir a partir de la altura:

$$T = f(h) = 30 - \frac{1}{100}\, h$$

Se puede predecir la altura a partir de la temperatura? Despejar h y hacer gráfica

$$h = g(T) = 100\,(30 - T)$$

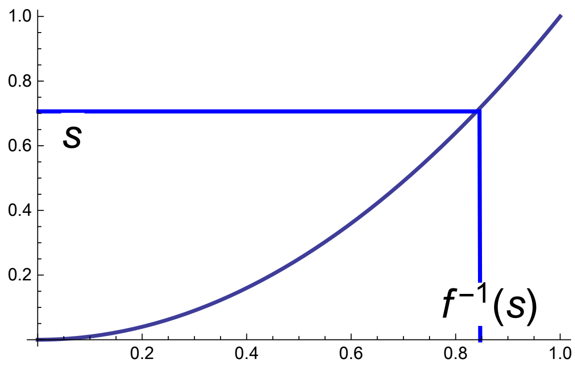
Definición

La función inversa de f se denota como f^{-1} y está definida por:

$$f^{-1}(s) = \text{ (el número } t \text{ tal que } f(t) = s \text{)}$$
$$\text{Es decir: } \; f^{-1}(s) = t \Longleftrightarrow f(t) = s$$

Ejemplos:

- A partir de una gráfica.



- A partir de una tabla: la siguiente tabla muestra la tasa de inflación I en Colombia como función del tiempo t en años, entre 1990 y el 2008. En ella se pueden leer dos funciones: $I = f(t)$ y $t = f^{-1}(I)$.

Año	Tasa de inflación
1990	-0.0232766
1991	0.00389954
1992	0.0287113
1993	0.0949209
1994	0.255224
1995	0.0999852
1996	0.0290532
1997	0.0616146
1998	-0.0817086
1999	-0.0855158
2000	-0.056955
2001	-0.0335857
2002	-0.0225418
2003	-0.057584
2004	0.185398
2005	0.202006
2006	0.0499805
2007	0.190086
2008	0.14406

- A partir de una fórmula: si el número de bacterias en un cultivo está dado por $N = f(t) = 2\,e^{0.5\,t}$, entonces $f^{-1}(x)$ es el tiempo requerido para tener x bacterias. Hallar una fórmula para $f^{-1}(x)$.

Dominio y rango de f^{-1}

f^{-1} está definida en todos aquellos s tales que $f(t) = s$ para algún t. Entonces:

$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Ran}(f)\,,\quad \mathrm{Ran}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f)$$

Cuáles funciones tienen inversa?

$$f^{-1}(s) = (\text{el número } t \text{ tal que } f(t) = s\,)$$

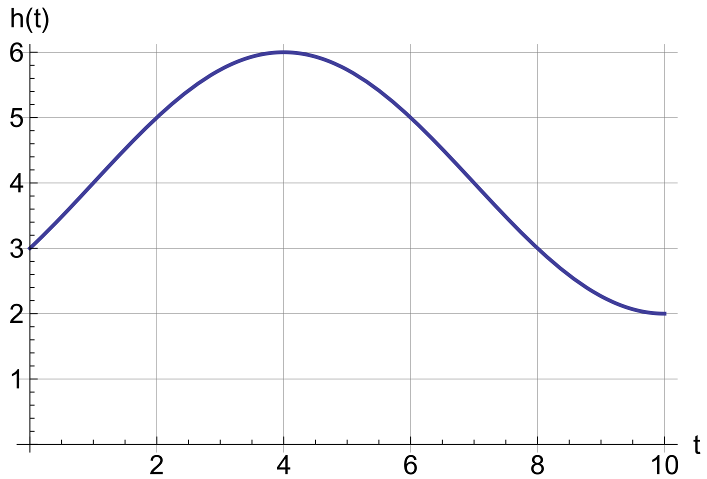
Por tanto, **para que $f^{-1}(s)$ esté definida debe existir un único t tal que $f(t) = s$**. O sea: **f no puede repetir valores**.

Las funciones que cumplen esta condición se llaman funciones: **uno a uno, biyectivas o invertibles**.

Ejemplos

A partir de una gráfica

Sea $H(t)$ la altura de la marea en Tumaco, como función del tiempo. Para algunos valores h en el rango de H existe más de un valor $t \in \text{Dom}(H)$ tal que $H(t) = h$. Entonces no tiene inversa.



Test de la recta horizontal: Si una recta horizontal, corta a la gráfica de f en más de un punto, entonces f no es uno a uno.

A partir de una tabla

Si una tabla tiene entradas repetidas en la segunda columna, no describe una función uno a uno. Por ejemplo, para los gases, la valencia (# de enlaces que puede formar) se puede predecir a partir de radio atómico, pero no viceversa.

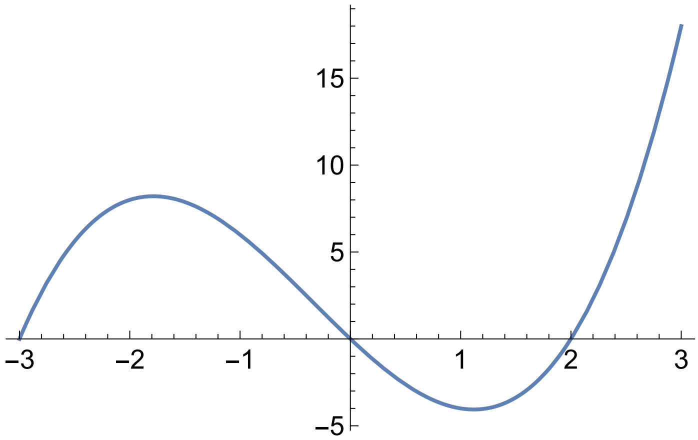
Nombre	Radio Atómico	Valencia
hydrogen	53.	1
helium	31.	0
nitrogen	56.	3
oxygen	48.	2
fluorine	42.	1
neon	38.	0
chlorine	79.	5
argon	71.	0
krypton	88.	2
xenon	108.	6
radon	120.	6

A partir de una fórmula

A partir de una fórmula: si para algún valor de y, existe más de una $x \in \text{Dom}(f)$ que resuelva la ecuación $y = f(x)$, entonces f no es uno a uno.

- Ejemplo: $f(x) = x(x-2)(x+3)$, tiene tres raíces, entonces no puede ser uno a uno.

```
Plot[x (x - 2) (x + 3), {x, -3, 3}]
```

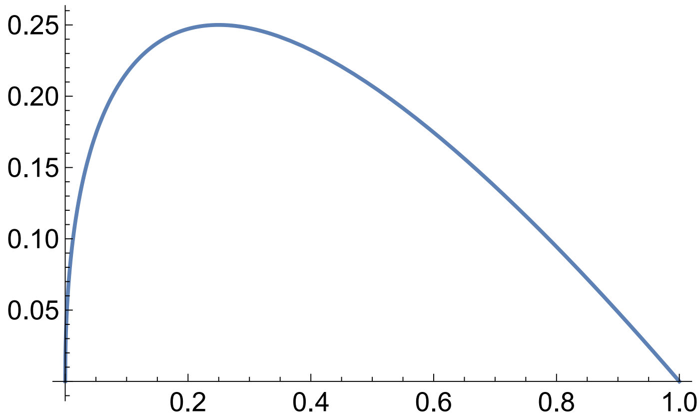


Otra forma es encontrar si existen x_1, $x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

- Ejemplo: $g(x) = \sqrt{x} - x$ es uno *a* uno?

$$g(x_1) = g(x_2) \Longleftrightarrow \sqrt{x_1} - x_1 = \sqrt{x_2} - x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = x_1 - x_2$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ó } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1$$

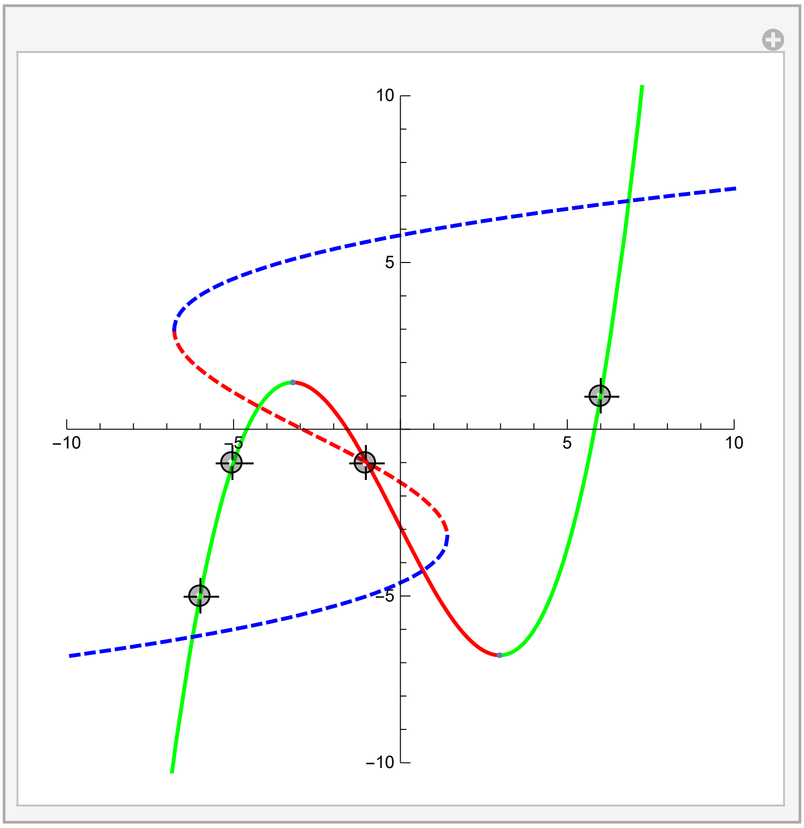
```
Plot[√x - x, {x, 0, 1}]
```



La gráfica de f^{-1}

Mostrar puntos de f y f^{-1} en una gráfica si: $f(3) = 4$, $f(2) = 2$, $f(0) = -1$.

Dada la gráfica de una función invertible f, la gráfica de f^{-1}se obtiene reflejando la curva de f al rededor de la línea recta con pendiente igual a 1. Al mover los círculos negros en la demostración, se obtienen gráficas de polinomios. La curva punteada muestra la gráfica de lo que sería la función inversa de f. Noten que cuando f deja de satisfacer la **prueba de la recta horizontal (o sea, no es uno a uno)**, la gráfica de f^{-1} deja de satisfacer la **prueba de la recta vertical (o sea, no es función).**



Propiedades

$f^{-1}(f(x)) = y \Leftrightarrow f(y) = f(x) \Leftrightarrow y = x$ Entonces
Entonces $f^{-1}(f(x)) = x$

$\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$
Entonces $\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = x$

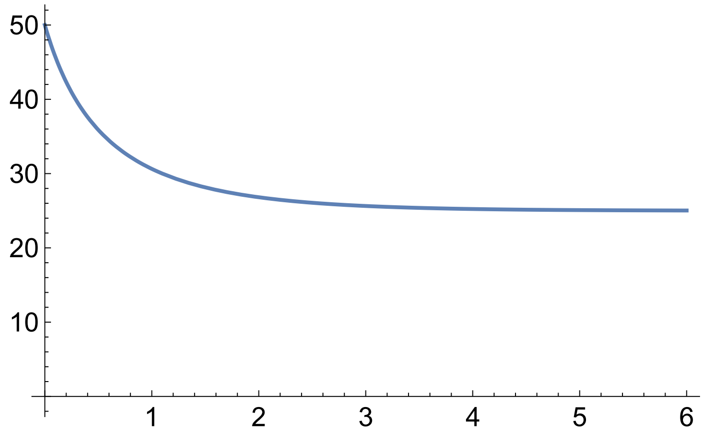
Suponga que f, g son funciones invertibles :
$(f \circ g)^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = (f \circ g)(y) \Leftrightarrow x = f(g(y))$
$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = g(y) \Leftrightarrow g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = y$
Entonces $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Más ejemplos

- Si $g(x) = 3 + x + e^x$, halle $g^{-1}(4)$.
- Halle f^{-1} si $f(x) = \begin{cases} x - 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$
- La temperatura T de un pan, t minutos después de salir del horno está dada por $T(t) = \frac{50\, e^t}{2\, e^t - 1}$ en grados centígrados. Determinar si T es invertible, hallar T^{-1} y su significado.

```
Plot[50 ⅇ^t/(2 ⅇ^t - 1), {t, 0, 6}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
```

$$\text{Plot}\left[\frac{50\, e^{t}}{2\, e^{t}-1}, \{t, 0, 6\}, \text{AxesOrigin} \to \{0, 0\}, \text{PlotRange} \to \text{All}\right]$$



Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.