# Clase 13

Cálculo de límites: límites de funciones compuestas y cambios de variable. Continuidad: definición y teoremas básicos.

---

## Límites de funciones compuestas

Calcular los siguientes límites haciendo un cambio de variable:

$$\lim_{\alpha\to\pi} \cos(\sin\alpha) =$$
$$\lim_{x\to 0} \ln\left(x^2+1\right) =$$
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} =$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{2y}-1}{e^{y}-1} =$$

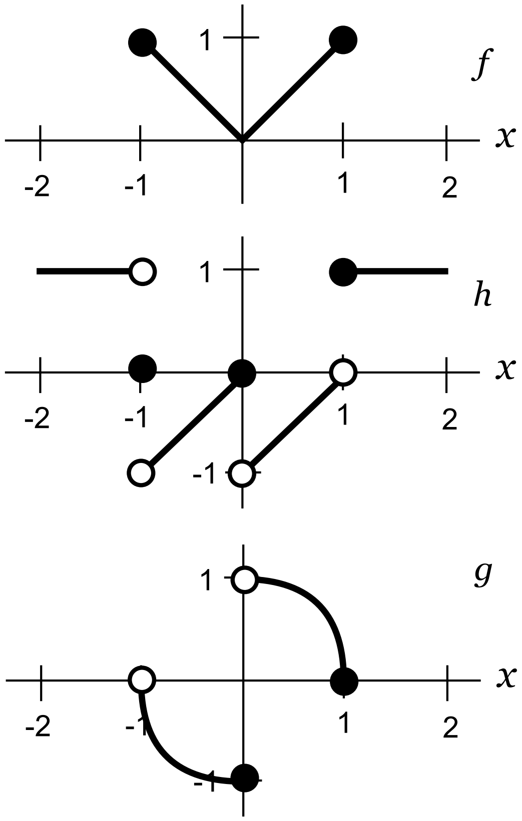
### Teorema

Si $\lim_{x\to a} g(x) = L^+$ y $\lim_{y\to L^+} f(y)$ existe, entonces

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to L^+} f(y)$$

### Ejemplo

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)),\ \ \lim_{x\to 1} f(h(x)),\ \ \lim_{x\to -1} g(f(x)),\ \ \lim_{x\to 0} \sqrt{\ln(f(x)+1)}$$




# Continuidad

Sabemos que en general $\lim_{x\to a} f(x)$ no tiene nada que ver con el valor $f(a)$. De hecho, calcular $\lim_{x\to a} f(x)$ es más importante cuando $f(a)$ no está definida.

**Mostrar gráficos de funciones con igual límite pero diferente *f*(*a*)**

Por otra parte, supongamos que $a \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f(a)$ si está definida y supongamos que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

En este caso, la función $f$ no hace nada raro en $a$: ***f* toma exactamente el valor que parece que va a tomar**.

## Definición.

- Si $a \in \mathrm{Dom}(f)$, $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, y además se cumple que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, se dice que $f$ es **continua** en $x = a$.

**Importante:** $f$ debe satisfacer tres cosas para ser continua en $x = a$. Mostrar gráficas de funciones que no cumplan cada una de las condiciones.

- Si $a \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f$ no es continua en $a$, se dice que $f$ es **discontinua** en $a$.
- Si $a \in \mathrm{Dom}(f)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe, y además se cumple que $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, se dice que $f$ es continua por derecha en $x = a$. Similarmente por la izquierda.
- Si $f$ es continua en todo $x \in (a, b)$ se dice que es continua en $(a, b)$. Si $f$ es continua en $(a, b)$ y continua por la derecha en $a$, entonces se dice que $f$ es continua en $[a, b)$....

## Ejemplos de funciones continuas.

- Los polinomios.
- Las funciones racionales.
- Las funciones trigonométricas.
- ... todas las funciones dadas por en términos de funciones racionales, potencia, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas en todo su dominio.

## Ejemplos de funciones no continuas.

- Las funciones $\lfloor x \rfloor$ y $\lceil x \rceil$
- En la vida real:
  - la función taxi, o la velocidad de una pelota que rebota.
  - Si $x(t)$ es distancia recorrida, qué significa cada tipo de discontinuidad?
- Muchas funciones dadas por tramos

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & t < 1 \\ t & t \geq 1 \end{cases}$$

## Propiedades

Si $f$ y $g$ son funciones continuas en $a$, las siguientes funciones también son continuas en $a$: $f + g$, $f \times g$, $c f$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$ y $f / g$ siempre y cuando $g(a) \neq 0$.

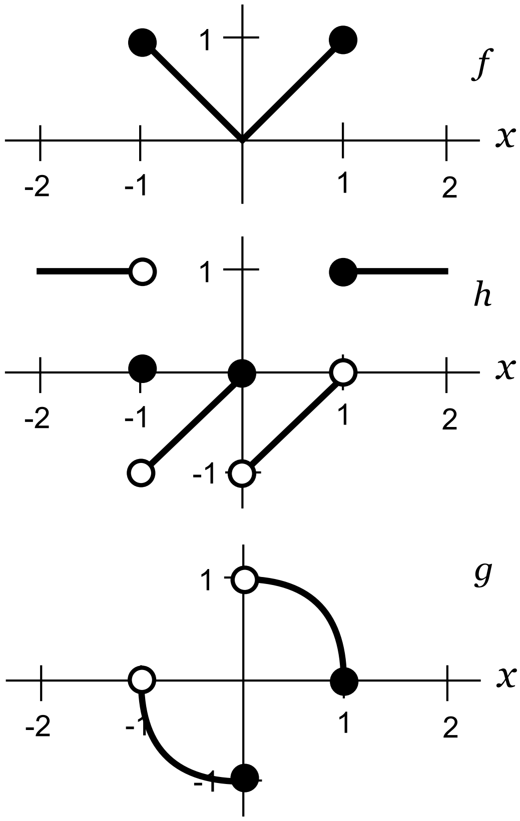
### Mas interesante

Si $f$ es continua en $b$ y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(b)$$

Por tanto, si $g$ es continua en $a$ y $f$ es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en $a$.

**Ejemplo:** es $f \circ g$ continua en 0? es $h \circ h$ continua en $-1$?



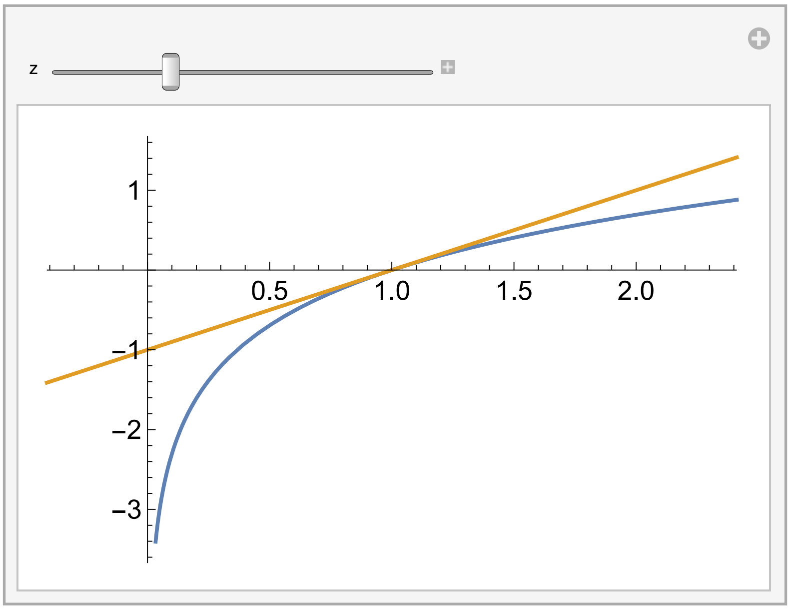

## Aplicación: usar el log para calcular límites

Es fácil ver que si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen y son diferentes de cero, entonces

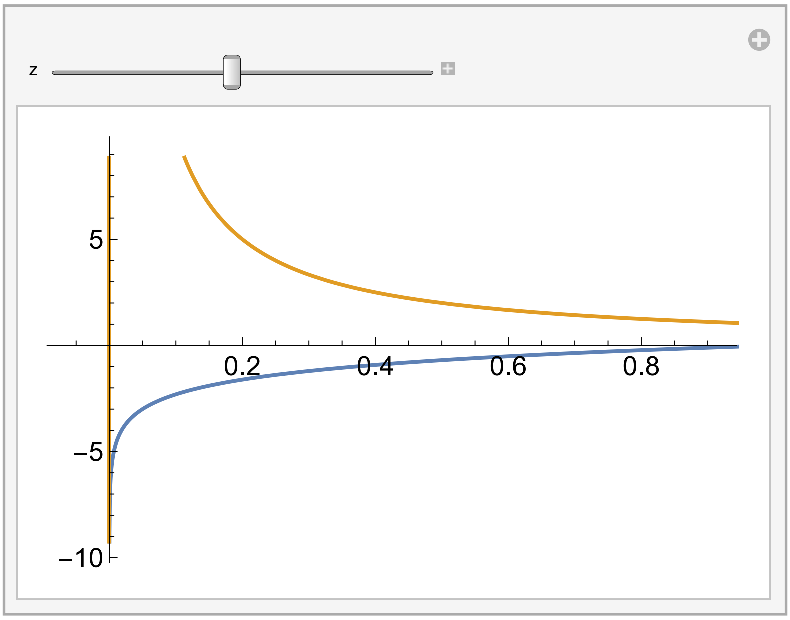
$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = (\lim_{x\to a} f(x))^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Ahora, qué pasa si alguno de esos límites es cero, o no existe?
Recordemos los siguientes límites notables:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1\ ,\ \ \lim_{x\to 0} x \ln x = 0$$




Out[97]=



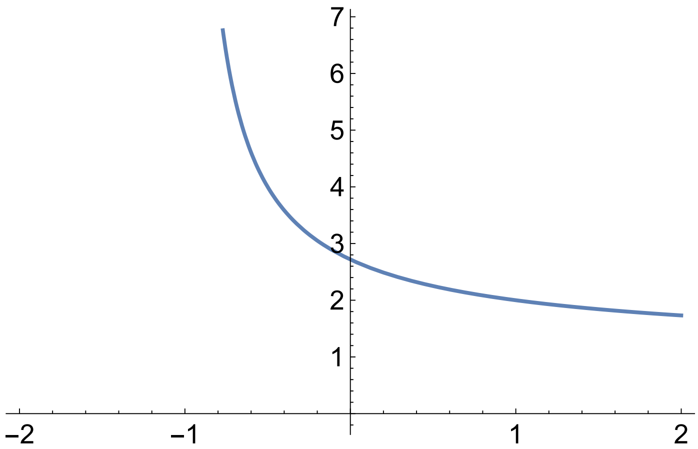

Entonces:

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

In[95]:= Plot$\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}, \{x, -2, 2\}\right]$

Out[95]=




## Teorema del valor intermedio.

Este es uno de los teoremas sobre funciones continuas más importantes.

Si f es continua en $[a, b]$ y $N \in [f(a), f(b)]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = N$.

**Significado:** una función continua toma todos los valores de cualquier intervalo cerrado de su rango. Hacer gráficas incluyendo por qué se requieren que $f$ sea continua, y que el intervalo sea cerrado.

**Ejemplo:** Demostrar que la función $f(x) = e^x - 2 - x$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

## Aplicación: método de bisección para hallar raíces.

Out[96]=