Clase 1.

Introducción. Cuatro maneras de representar una función, definición de función, dominio, rango, gráfica de una función, prueba de la recta vertical, relaciones implicítas.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Introducción.

- Bienvenida.
- Mostrar website y programa.
- Filosofía de enseñanza - cómo ganar.
- Talleres - Hacer Taller 0.

Qué es el cálculo diferencial?

Es el estudio matemático de **cantidades numéricas relacionadas**, aplicado a la modelación de los fenómenos y relaciones causa-efecto que observamos en el mundo que nos rodea. En particular queremos calcular cómo responde una variable cuando cambia la otra.

- Cantidades númericas: variables.
- Relación entre variables: función.
- Relación entre los cambios: diferenciación.

Ejemplos de variables relacionadas:

- Un ejemplo muy simple de dos variables relacionadas: área del círculo y su radio.
- El ejercicio de cálculo más complejo de la historia: modelación del cambio climático. Millones de variables relacionadas.
- Un ejemplo donde se visualizan muchas variables relacionadas para entender la historia http : // www.gapminder.org

Cálculo diferencial en una variable:

Si tenemos que una variable númerica: y (la temperatura del aire), que depende de otra: t (el tiempo), en este curso vamos a:

- Escribir y como función de t: $y = f(t)$.
- Calcular cómo se puede aproximar y cuando t es muy cercano de a: $\lim_{t \to a} f(t)$
- Calcular la tasa a la cual cambia y cuando t cambia: $\frac{dy}{dt} = f'(t)$
- Aplicar estos cálculos para extraer información sobre el fenómeno físico.

El ejemplo más importante: 2a ley de Newton (1687).

t = tiempo, $v(t)$ = velocidad, m = masa, $F(t)$ = total fuerzas, $y(t)$ = posición.

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t),$$
$$y(t) = \int_0^t v(s)\, ds \, .$$

Funciones

Sean t y y variables númericas. Decimos que t y y están relacionadas mediante una función si: para cualquier valor posible de t, existe un único valor de y relacionado con éste.

Es decir: el valor de y se puede predecir (calcular, estimar ...) a partir del de t

$$\text{Escribimos}: \; y = f(t)$$

- Variable independiente: t
- Variable dependiente: y
- Nombre de la función: f

Dominio y rango, notación matemática.

- Sea A el conjunto de valores que “puede” tomar t. Entonces $A \subseteq \mathbb{R}$. A se llama el **dominio** de f y se escribe $A = \text{Dom}(f)$
- Sea B el conjunto de valores que toma y cuando t varía sobre todo A. Entonces $B \subseteq \mathbb{R}$. B se llama el **rango** de f y se escribe $B = \text{Ran}(f)$

$$\text{Escribimos}: \; f : A \to B, \;\; t \mapsto y = f(t) \, .$$

Una función se puede pensar cómo algo que transforma cantidades numéricas: le entra un valor $x \in \text{Dom}(f)$ de la variable independiente, y me devuelve el valor relacionado $y = f(x) \in \text{Ran}(f)$.

Cuatro formas de representar una función

Asignar notación, calcular dominio y rango. Notar que las funciones están dadas en diferentes formas.

- **Fórmula**: El área de un círculo y su radio.
- **Gráfica**: Proyecciones de calentamiento global
- **Tabla:** Tasa de cambio del dólar
- **Palabras:** el plan postpago de Claro cobra un cargo fijo mensual de \$30000 mas \$130 pesos por minuto a partir de los 180 minutos.

```
30 000 + 130  (30 × 24 × 60. - 180)
```

```
5.6226 × 10^6
```

Importante: en las ciencias y las ingenierías, las formas más comunes de describir una función es mediante tablas y gráficas. Para muy pocas relaciones entre las variables del mundo real se tienen fórmulas!!!

Ejemplos:

Mostrar en general cómo se identifica el dominio, rango, valores para funciones dadas por:

- Gráficas.
- Tablas.
- Fórmulas.
- Palabras.

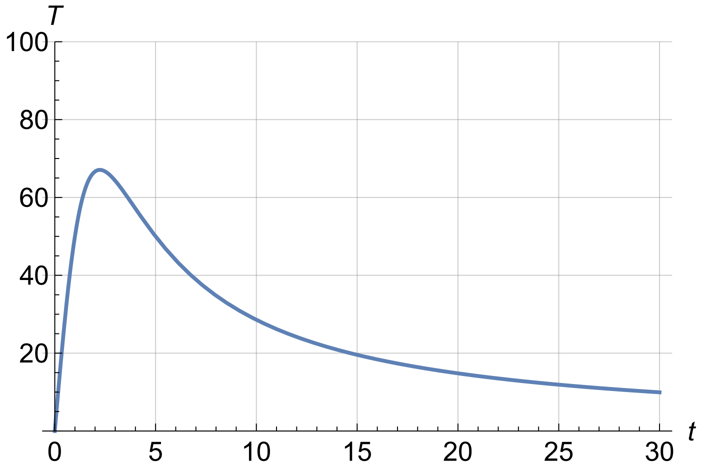
Ejemplo

Un pan se calienta en un microhondas, y su temperatura T en grados centígrados, como función del tiempo t en minutos, está dada por:

$$T = f(t) = \frac{200\,t}{t^2+1}$$

Usar la gráfica para describir el fenómeno físico: $t \to 0$, $t \to \infty$, máximo, mínimo,...

```
T[t_] := 300 t / (t^2 + 5);
Plot[T[t], {t, 0, 30}, GridLines → Automatic,
 PlotRange → {Automatic, {0, 100}}, AxesLabel → {t, T}]
```



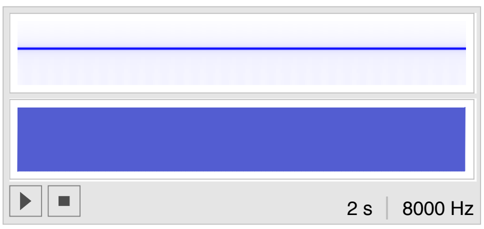

```
T[10 000.]
```

```
0.03
```

Hay más formas de representar funciones:

- como un reloj
- como un sonido:

```
Play[Sin[1000 π t], {t, 0, 2}]
```



⋮

```
http : // www.worldometers.info / es /
```

Ejemplo: relaciones entre las diferentes formas.

Producto interno bruto en Colombia en miles de millones de dólares como función del tiempo en años.

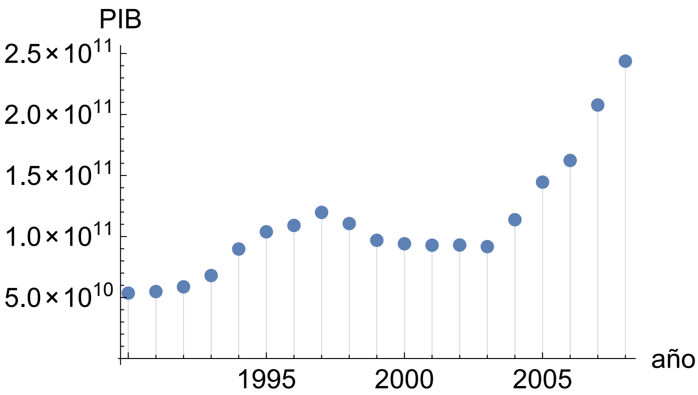
Como una tabla:

```
Datos := CountryData["Colombia", {{"GDP"}, {1990, 2013}}];
Datos =
  {DateList[#][[1]] & /@ Datos["Times"], QuantityMagnitude /@ Datos["Values"]}ᵀ;
TableForm[Datos, TableHeadings → {None, {"Año", "PIB×10^10"}}]
```

Año	PIB$\times 10^{10}$
1990	5.36062×10^{10}
1991	5.48924×10^{10}
1992	5.87526×10^{10}
1993	6.80027×10^{10}
1994	8.97524×10^{10}
1995	1.03862×10^{11}
1996	1.09077×10^{11}
1997	1.1977×10^{11}
1998	1.10611×10^{11}
1999	9.68993×10^{10}
2000	9.40531×10^{10}
2001	9.28768×10^{10}
2002	9.30156×10^{10}
2003	9.17024×10^{10}
2004	1.13774×10^{11}
2005	1.4458×10^{11}
2006	1.62347×10^{11}
2007	2.07786×10^{11}
2008	2.43744×10^{11}

Gráfica:

```
ListPlot[Datos, AxesLabel → {"año", "PIB"}]
```

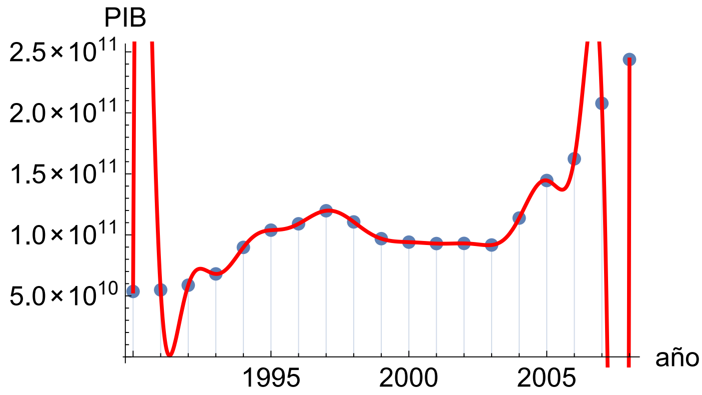


Una fórmula:

```
p[t_] := InterpolatingPolynomial[Datos, t];
Expand@p[t]
```

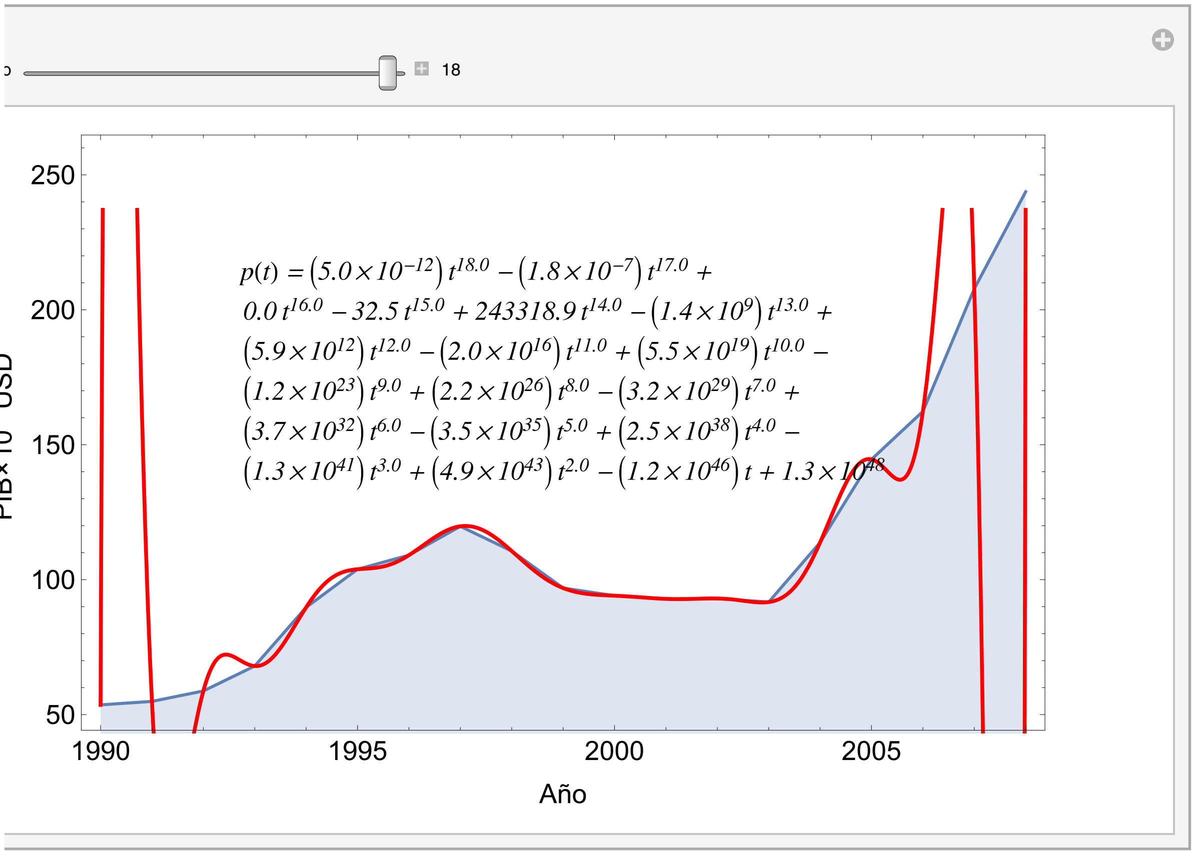
$1.28332\times10^{57} - 1.15618\times10^{55}\,t + 4.91883\times10^{52}\,t^{2} - 1.31304\times10^{50}\,t^{3} + 2.46447\times10^{47}\,t^{4} - 3.4538\times10^{44}\,t^{5} + 3.74546\times10^{41}\,t^{6} - 3.21368\times10^{38}\,t^{7} + 2.21167\times10^{35}\,t^{8} - 1.22996\times10^{32}\,t^{9} + 5.54049\times10^{28}\,t^{10} - 2.01678\times10^{25}\,t^{11} + 5.88829\times10^{21}\,t^{12} - 1.36022\times10^{18}\,t^{13} + 2.43145\times10^{14}\,t^{14} - 3.24523\times10^{10}\,t^{15} + 3.0455\times10^{6}\,t^{16} - 179.33\,t^{17} + 0.00498644\,t^{18}$

Las funciones dadas por las fórmula y la tabla son diferentes porque tienen dominios distintos, pero describen el mismo fenómeno:



Pregunta: es el polinimio $p(t)$ un “buen” modelo para la función del Producto Interno Bruto?

Describir los valores de una tabla mediante un polinomio siempre es posible:



Cómo saber si dos variables NO están relacionadas mediante una función?

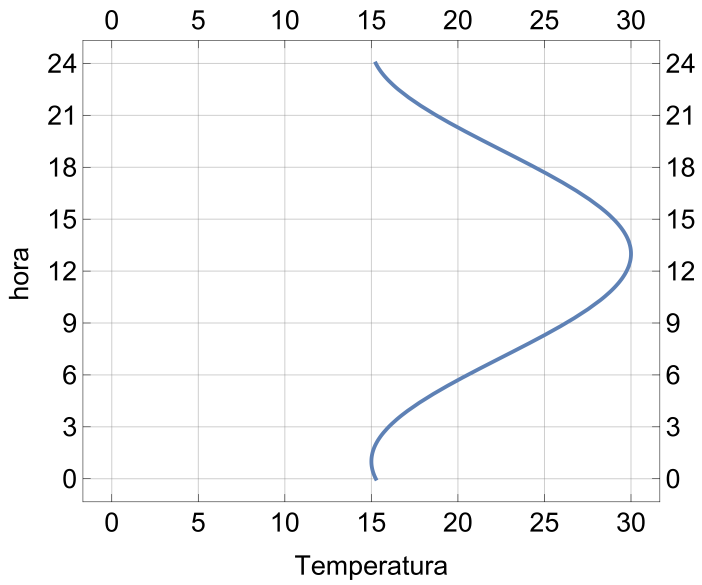
Si y, t son variables númericas relacionadas pero su relación viola la definición de función. Es decir, si para algún valor de t, existe más de un valor de y relacionado con éste, entonces no puede haber una función f donde $y = f(t)$. **En ese caso:** el valor de y no se puede predecir a partir del de t.

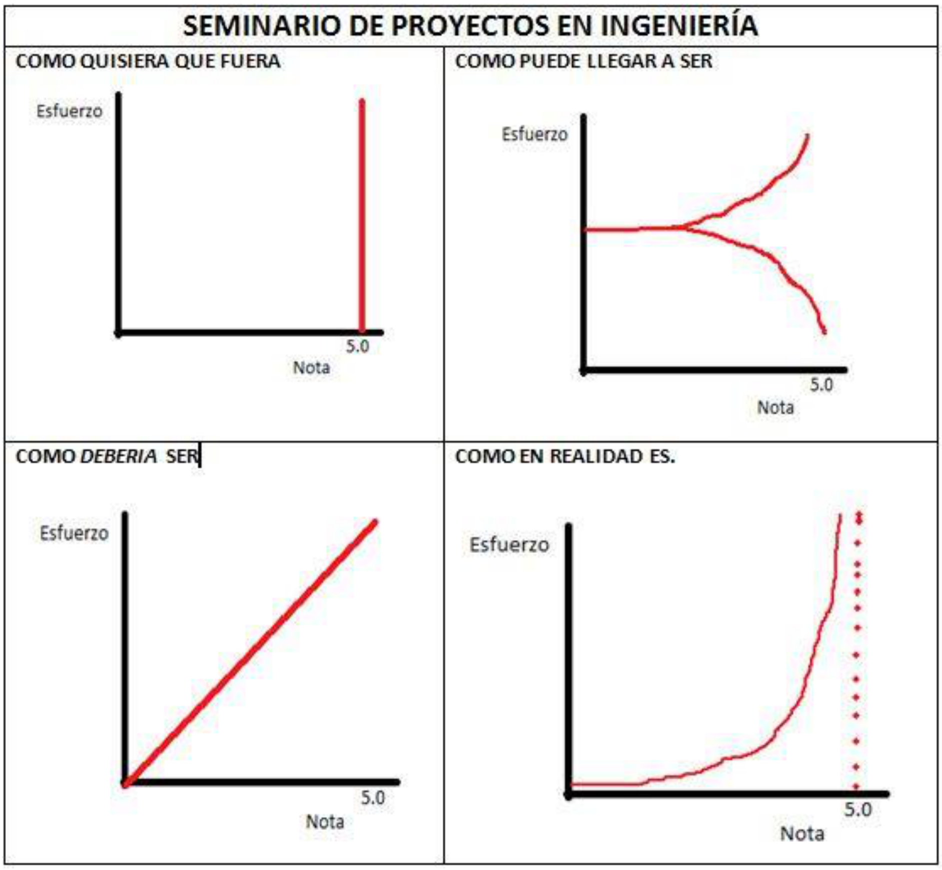
- En **tablas**: si la columna de la variable t tiene valores repetidos con diferentes valores en la columna de las y.

  Ejemplo: una tabla de la edad de los estudiantes vs. su estatura no representa una función. La altura no se puede predecir a partir de la edad (ni viceversa).

- En **gráficas**: si para algún valor de la variable independiente t^*, existen dos valores y_1, y_2 (o más) tales que los puntos (t^*, y_1), (t^*, y_2) estén en la gráfica. Es decir, la recta vertical $t = t^*$ corta a la gráfica en más de un punto. En ese caso no se podría especificar $f(t^*)$.

  Ejemplo: una gráfica de la relación entre la hora del día t y la temperatura media del aire T en Medellín, es algo como esto:





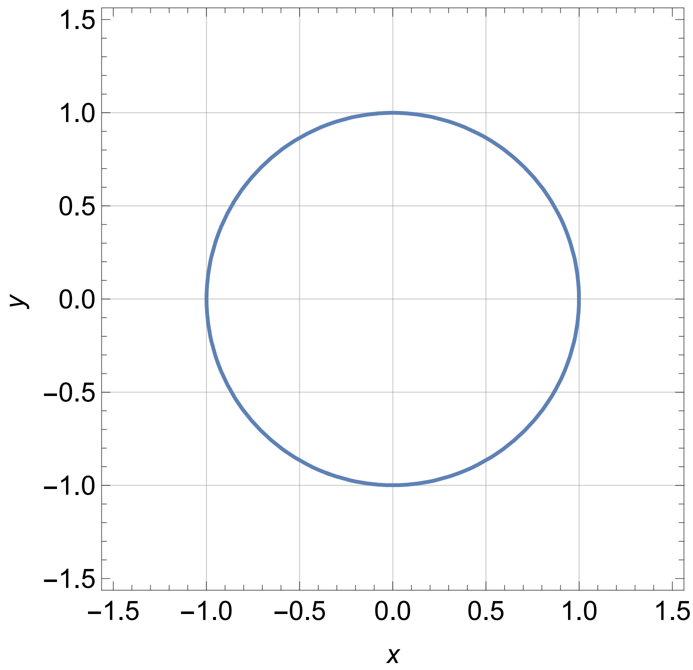
- En **fórmulas:** siempre, excepto en algunas relaciones implicitas...

Variables relacionadas implicitamente

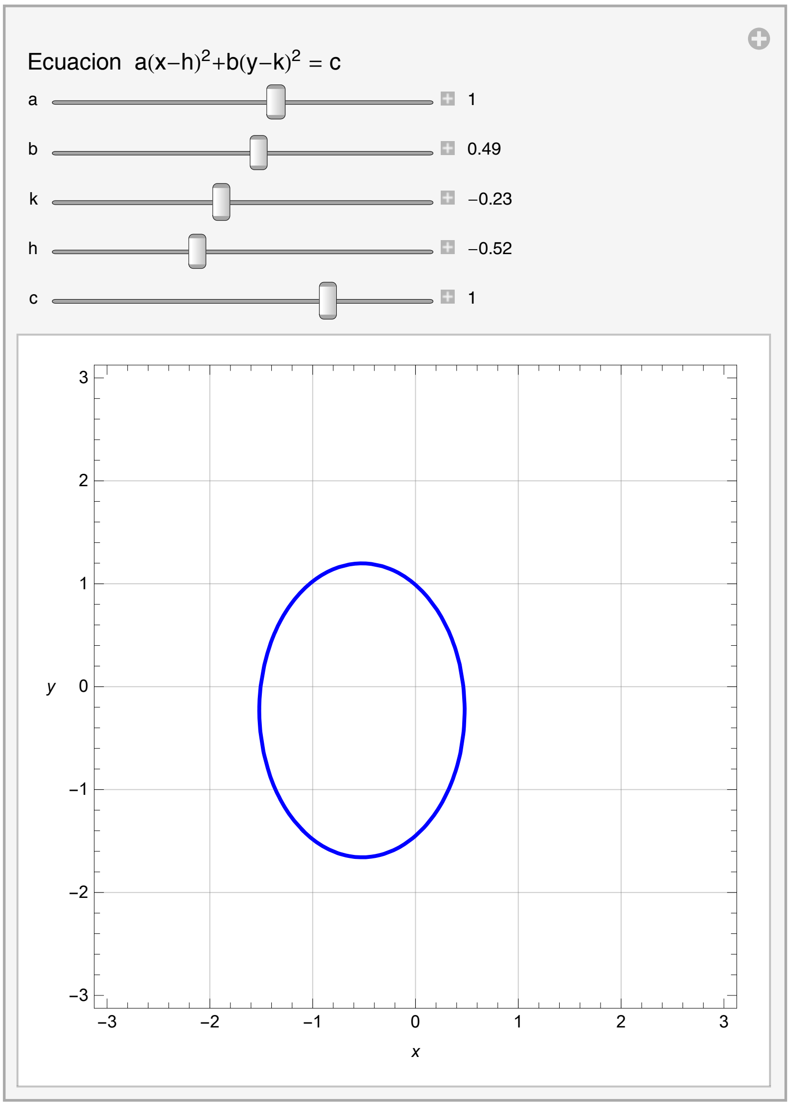
No siempre se puede expresar una relación entre variables de la forma $y = f(t)$. Existen muchos casos en los cuales y, t satisfacen una ecuación, pero no se puede despejar una variable en términos de la otra. En algunos de esos casos, esto ocurre porque en efecto, no hay una función que las relacione.

Ejemplos:

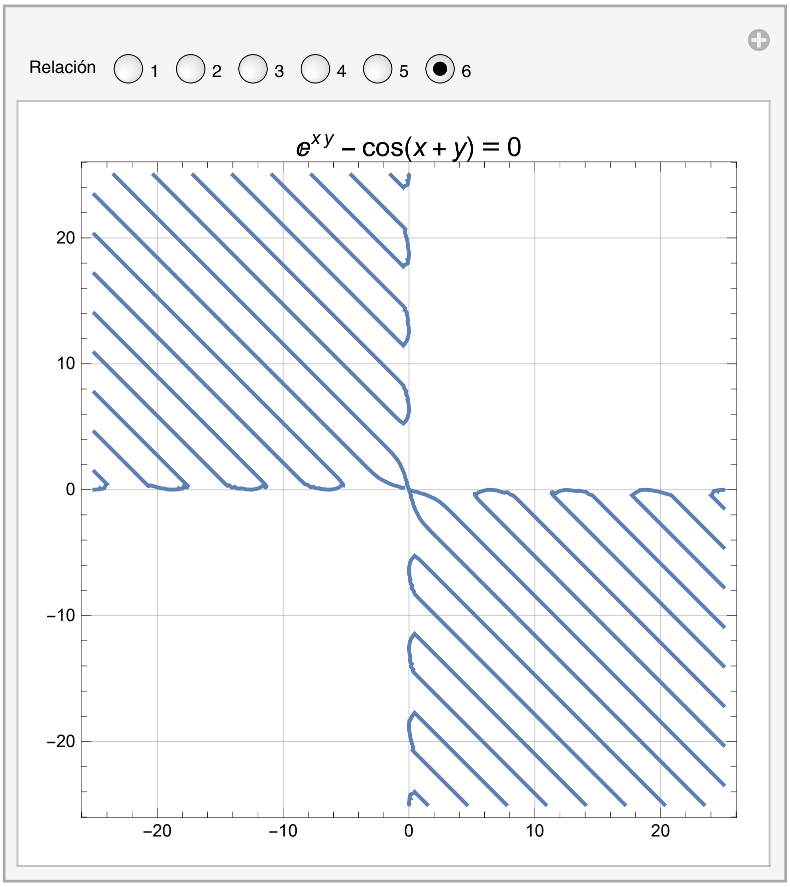
Suponga que x y y son variables que siempre satisfacen: $x^2 + y^2 = 1$



Gráficas de las secciones cónicas.

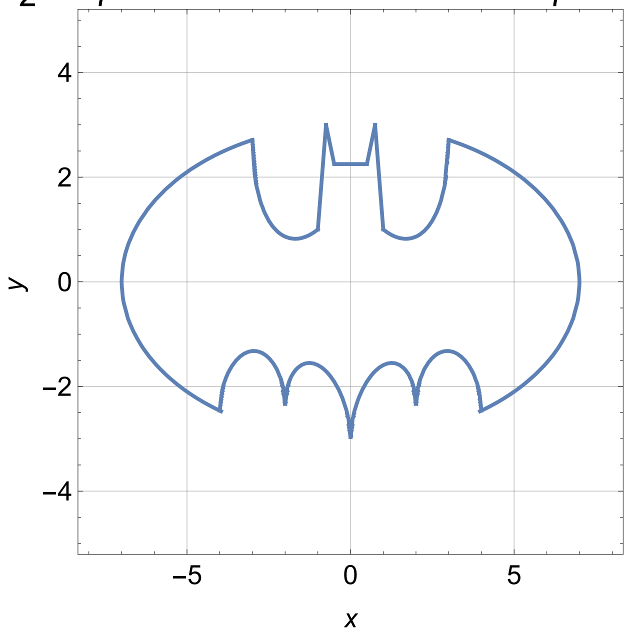


Otras curvas interesantes:



Pedazo

$$\frac{|x|}{2} - \frac{3}{7}\sqrt{10}\,\sqrt{4-(|x|-1)^2} - y + \frac{6\sqrt{10}}{7} + \frac{3}{2} =$$



Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.