Clase 15

Tangentes, velocidades y otras razones de cambio. Definición de derivada, interpretación de la derivada como la pendiente de una tangente, interpretación de la derivada como una razón de cambio

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
Todos los derechos reservados.

Introducción

Mostrar gråficas lineales a tramos de

- Distancia recorrida como función del tiempo
- Precio a pagar como función de la cantidad
- Altura como función de la distancia horizontal
- Población como función del tiempo

Mostrar las funciones de las pendientes: describir las unidades e introducir el concepto de **tasa de cambio de la variable dependiente por unidad de la variable independiente.**

Tasas de cambio y derivadas

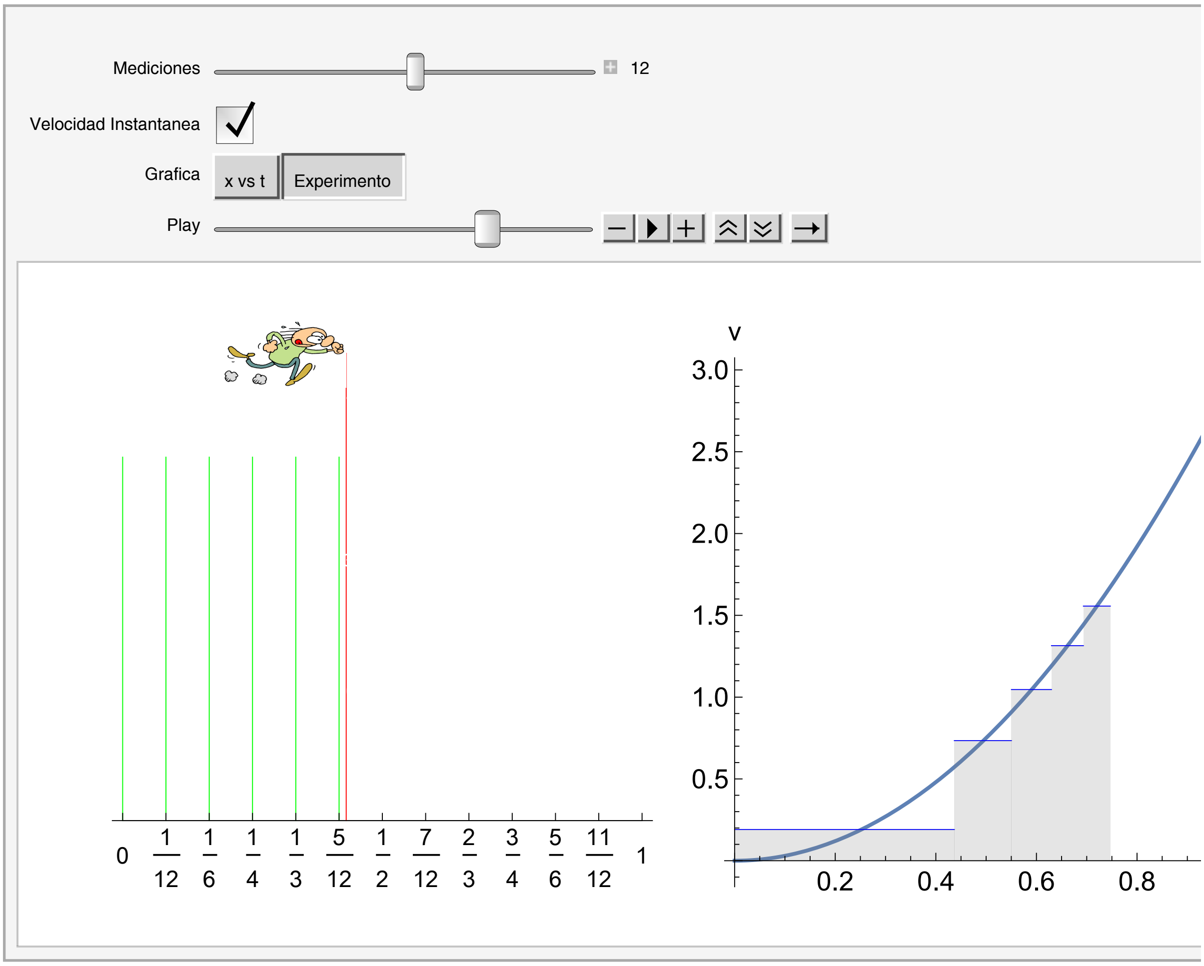
Velocidad media e instantánea

Si una partícula se mueve, su posición x es función del tiempo t, o sea está dada por $x(t)$. Es fácil calcular la **velocidad media de un intervalo de tiempo:** es igual a la distancia recorrida, dividida por la duración del intervalo.
La velocidad media entre durante el intervalo (t, s) es

$$\overline{v} = \frac{x(s)-x(t)}{s-t}$$

La **velocidad instántanea en el tiempo** t, se calcula tomando velocidades medias en intervalos cada vez mas pequeños alrededor de t, o sea

$$v(t) = \lim_{s\to t} \frac{x(s)-x(t)}{s-t} = \frac{dx}{dt}(t)$$

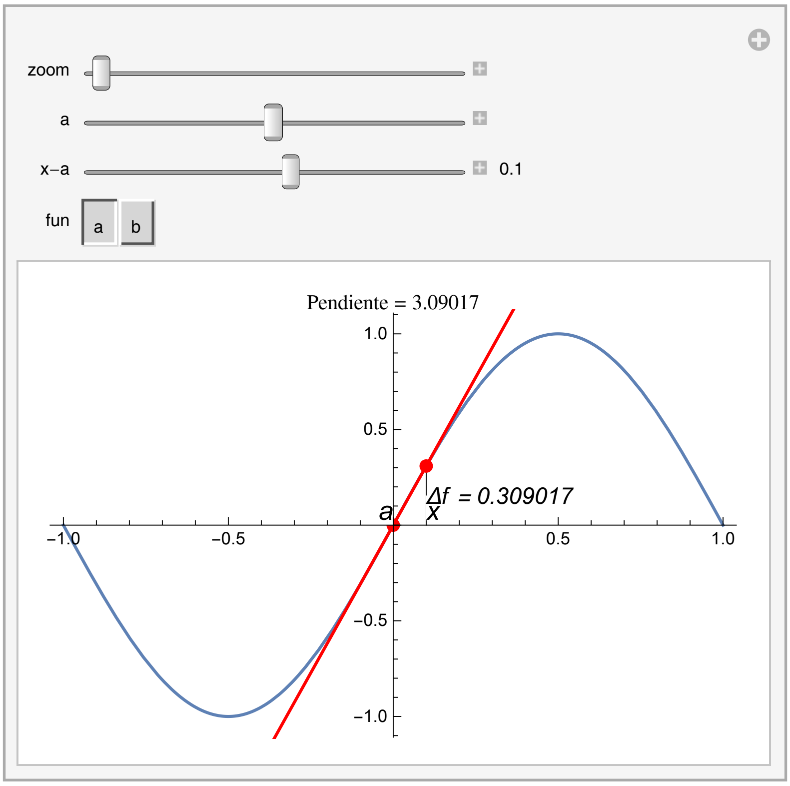


La pendiente de la recta tangente en un punto

Si $x < y$ pertenecen al dominio de una función f, entonces el cambio de f entre x y a es $f(a) - f(x)$. La tasa de cambio media entre x y a es $\frac{f(a)-f(x)}{a-x}$. Geométricamente, la tasa de cambio media es la tangente del ángulo que la recta entre los puntos $(x, f(x))$ y $(a, f(a))$ forma con la horizontal. A esta recta se le llama la **recta secante** entre estos dos puntos. Si tomamos el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(y)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{df}{dx}(a)$$

obtenemos el ángulo que la recta **tangente a la gráfica** $y = f(x)$ **en el punto** $(x, f(x))$ **forma con la horizontal.**



Definición de derivada

Sea $a \in \mathrm{Dom}(f)$, se define

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si el límite existe, $f'(a)$ se llama la derivada de f en a. Representa:

- La tasa de cambio de f por unidad de x cuando $x = a$.
- Geométricamente, $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a,\ f(a))$.
- Es el límite de las tasas de cambios promedio de f respecto a x, tomada en intervalos cada vez más pequeños al rededor de a.
- La derivada ofrece inmediatamente una fórmula para aproximar f cerca de a por una función lineal:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \text{ para } x \approx a.$$

Ejemplo. Sea $y(t) = 4t - 9.8t^2$ la altura en metros de una pelota que se lanza al aire. Calcular $y'(1)$, sus unidades y significado.

Ejemplo. La ley de Torricelli da la velocidad a la que sale el agua por un orificio pequeño de un tanque lleno hasta una altura h. La energia potencial es $m g h$ y debe ser igual a la cinética: $\frac{1}{2} m v^2$.

Entonces $v(h) = \sqrt{2 g h}$. Calcular $v'(1)$. Unidades y significado.

Ejemplo de interpretación. $C(r)$ es monto total a pagar por un préstamo, si éste se hace a una tasa de interés r. Se sabe que $C(0.08)$ es 40 millones, y $C'(0.08) = 300\,000$.

Ejemplo de interpretación. $D(w)$ es la dosis diaria de cierta droga, en mm^3, que debe tomar un paciente de peso w en Kg. Se sabe que $D(70) = 15$ y $D'(70) = -2$.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
Todos los derechos reservados.