

# Clase 22

## Rapidez de cambio en las ciencias. Diferenciales y Aproximación lineal.

Jorge Ramirez,  
Escuela de Matemáticas,  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.  
Todos los derechos reservados.

### Diferenciales

Las funciones diferenciales se pueden aproximar mediante una recta tangente.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

El cambio en la variable independiente se denota  $dx = \Delta x$ , y el cambio en la variable dependiente es  $\Delta f$  que se puede aproximar como

$$\Delta f \approx f'(x) \Delta x = df \text{ para } dx \approx 0$$

El diferencial  $df$  es entonces la aproximación a  $\Delta f$  que da la recta tangente. Bajo esta notación tenemos que

$$\Delta f \approx df = f'(x) \Delta x \implies df = f'(x) dx \implies f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

### El error

El error en la aproximación es:

$$E(\Delta x) = | \Delta f - df |$$

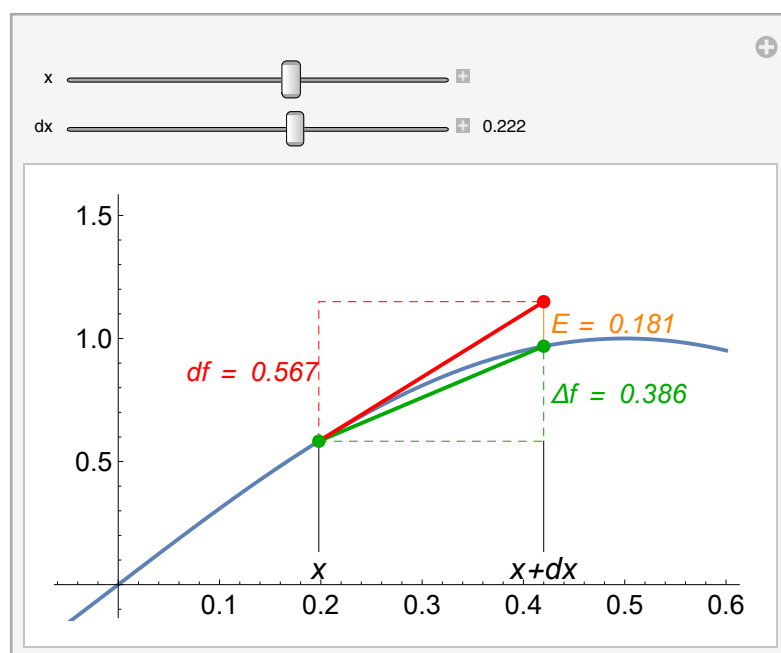
y satisface

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{E(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta f - df}{\Delta x} \right| = \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) \right| = 0$$

es, decir,  $E(\Delta x) \ll \Delta x$  para  $\Delta x \approx 0$ . De hecho, si  $f$  es dos veces diferenciable:

$$E(\Delta x) \approx \frac{f''(x)}{2} \Delta x^2$$





## Aplicaciones

### Cálculos aproximados

#### Ejemplo

Usar diferenciales para estimar  $\sqrt{27}$

$$\sqrt{27}.$$

5.19615

#### Ejemplo

Halle una fórmula aproximada, y estime el error, para la velocidad del sonido en el aire para temperaturas alrededor de 30 °C, si se sabe que:

$$v_s(T) = 331.3 \sqrt{1 + \frac{T}{273.15}} \text{ m/s}$$

#### Ejemplo

**La famosa fórmula de Einstein.** En la relatividad especial, Einstein encontró que la masa de un objeto depende de su velocidad  $v$ :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

donde  $m_0$  es la masa en reposo. Pero si  $x \approx 0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ , por tanto

$$m c^2 \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 = E_r + E_k = E$$



## Estimar cambios en funciones

### Ejemplo

En el año 2000, el diámetro de una pelota de tenis de mesa, pasó de 38mm a 40 mm. Estimar el cambio en el volumen y la fuerza de arrastre  $F = \frac{1}{2} C_d \rho v^2 A$ . Note que  $\frac{dv}{dt} = -F v$ .

### Ejemplo

¿Cuánta pintura se requiere para pintar un domo esférico de radio 50 m, si la capa de pintura es de 5 mm?

### Ejemplo

La cantidad de sangre que pasa por una arteria en  $\text{mm}^3/\text{seg}$  está dada por  $Q = k r^4$ . Calcule cuánto se disminuye el flujo si el radio se disminuye en un 10%.

## Análisis de propagación de errores en mediciones y cálculos

### Ejemplo

Si al medir la longitud del lado de un cubo de 20 cm de lado, se usa una regla y se comete un error de medio milímetro, estime el error máximo en el cálculo del volumen. Si quiero que el volumen tenga una precisión de 3 cifras decimales, cuál debe ser la precisión para medir el lado?

### Ejemplo

Repetir con el período de un péndulo si  $T = \sqrt{L/g}$

Jorge Ramirez,  
Escuela de Matemáticas,  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.  
Todos los derechos reservados.