Clase 12

Cálculo de límites: reglas básicas para el cálculo de límites, límites de funciones definidas por tramos, teorema de compresión.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Propiedades de los límites

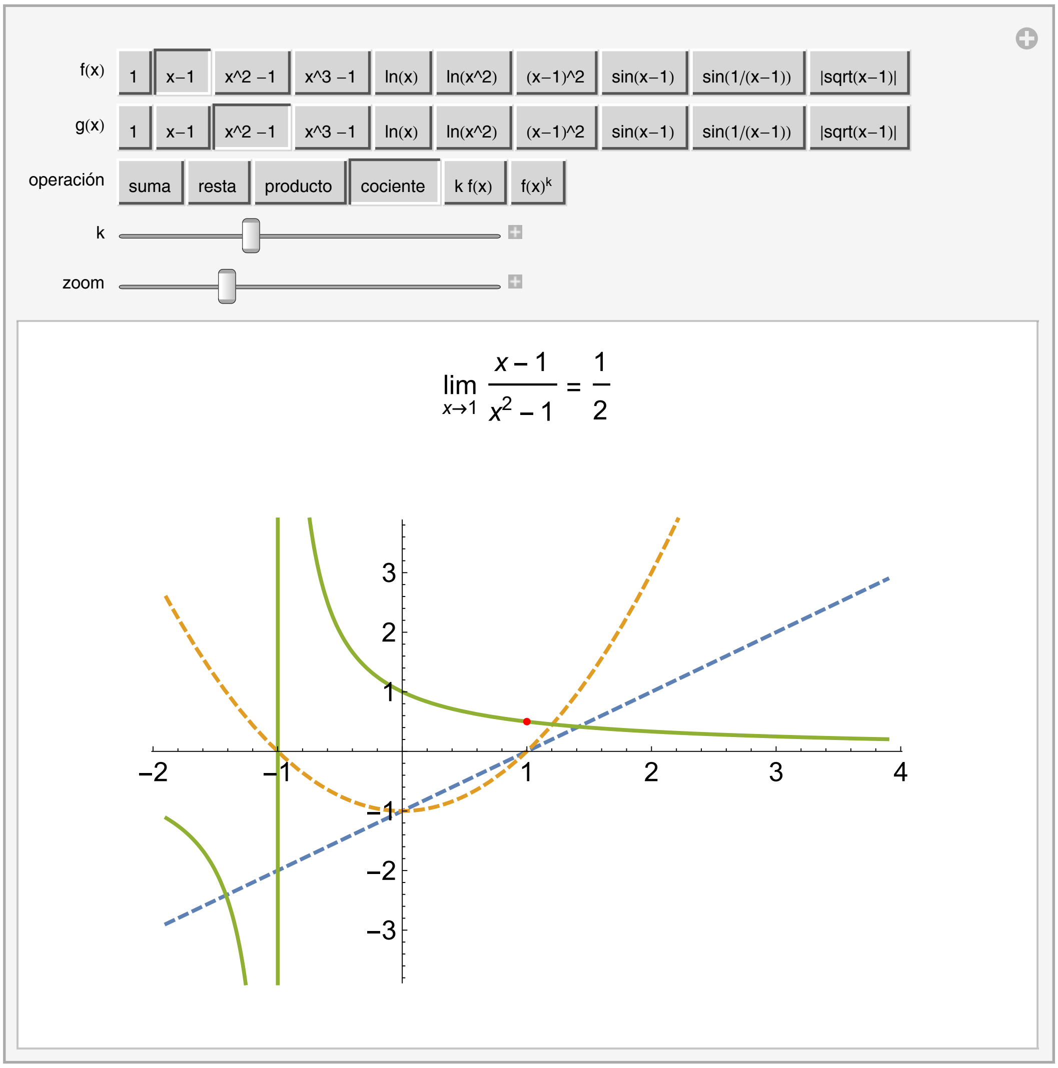
- El valor de $f(a)$ no tiene nada que ver con la existencia o el valor de $\lim_{x\to a} f(x)$. Mostrar gráficas

Suponga que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Entonces:

- $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x)) \times (\lim_{x\to a} g(x))$
- $\lim_{x\to a} c\,f(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x)^k = (\lim_{x\to a} f(x))^k$
- Si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Estas propiedades son triviales y no son muy interesantes. Los límites más interesantes son aquellos en los que las propiedades no se pueden aplicar.

Out[90]=



Qué pasa si el límite del denominador es igual a cero?

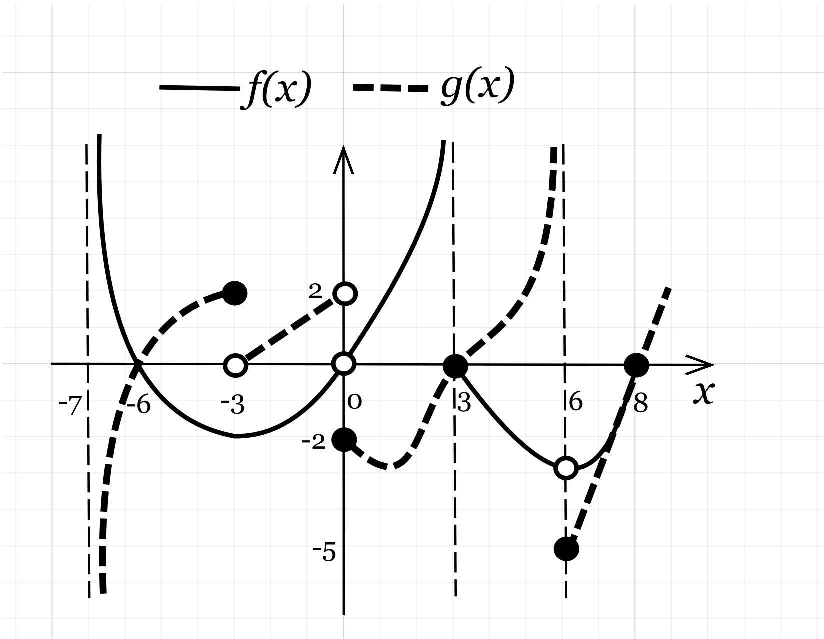
- Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe porque $\frac{f(x)}{g(x)}$ se hace arbitrariamente negativo o positivo.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ puede existir ó no, y dar cualquier resultado. Mostrar varios ejemplos con la demostración.

Este último caso es el más interesante y común. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces el resultado de $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$nos permite comparar los tamaños de los valores de $f(x)$ y $g(x)$ a medida que éstos tienden a cero. Por ejemplo:

- Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, entonces $f(x) \approx g(x)$ para $x \approx a$.
  - $\sin(x) \approx x$ para $x \approx 0$,
  - $\ln(x) \approx x - 1$ para $x \approx 1$.
- Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, entonces $f(x) \approx c\, g(x)$ para $x \approx a$.
  - $x^2 - 1 \approx \frac{2}{3}\left(x^3 - 1\right)$ para $x \approx 1$,

  - sen$(x-1) \approx \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$ para $x \approx 1$.
- Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, entonces $f(x)$ va para cero mucho más rápido que $g(x)$: $f(x) \ll g(x)$
  - $(x-1)^2 \ll x-1$ para $x \approx 1$,
  - sen$(x-1) \ll \sqrt{|\,x-1\,|}$ para $x \approx 1$.
- Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe porque se va para $+\infty$ entonces $g(x)$ va para cero mucho más rápido que $f(x)$: $g(x) \ll f(x)$. O lo que es equivalente: $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Ejemplo. Evaluar límites de varias combinaciones de las siguientes funciones.



Cálculo de límites a partir de fórmulas

La propiedad más importante

Como el valor de $f(a)$ no tiene nada que ver con $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces: si $f(x) = g(x)$ para todo x excepto en $x = a$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x},\quad \lim_{x\to 0} \frac{x-x}{x}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-5}{x-5}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{sen}(x)}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2, & 0<x<3 \\ 2 & x=3 \\ 2x+1 & x>3 \end{cases},\quad \lim_{x\to 3} f(x)$$

Por compresión

Sabemos que $\lim_{x\to 0} \cos(\pi/x)$ no existe, pero $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(\frac{\pi}{x})$ parece que si existe.

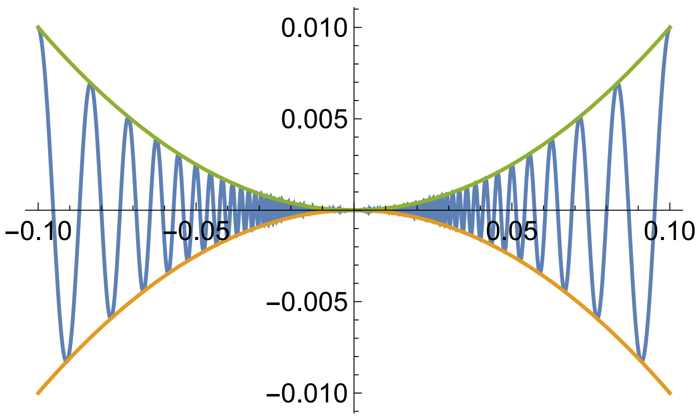
In[86]:=
```
FunctionTable[x, #^2 Cos[π/#] &, -0.1, 0.1, 0.01]
```

Out[86]//TableForm=

x	$x^2 \cos[\frac{\pi}{x}]$
-0.1	0.01
-0.09	-0.00761151
-0.08	-1.57151×10^{-18}
-0.07	0.0030551
-0.06	-0.0018
-0.05	0.0025
-0.04	-0.0016
-0.03	-0.00045
-0.02	0.0004
-0.01	0.0001
0.	Indeterminate
0.01	0.0001
0.02	0.0004
0.03	-0.00045
0.04	-0.0016
0.05	0.0025
0.06	-0.0018
0.07	0.0030551
0.08	-4.70462×10^{-17}
0.09	-0.00761151
0.1	0.01

In[87]:=
```
Plot[{x^2 Cos[π/x], -x^2, x^2}, {x, -0.1, 0.1}]
```

Out[87]=



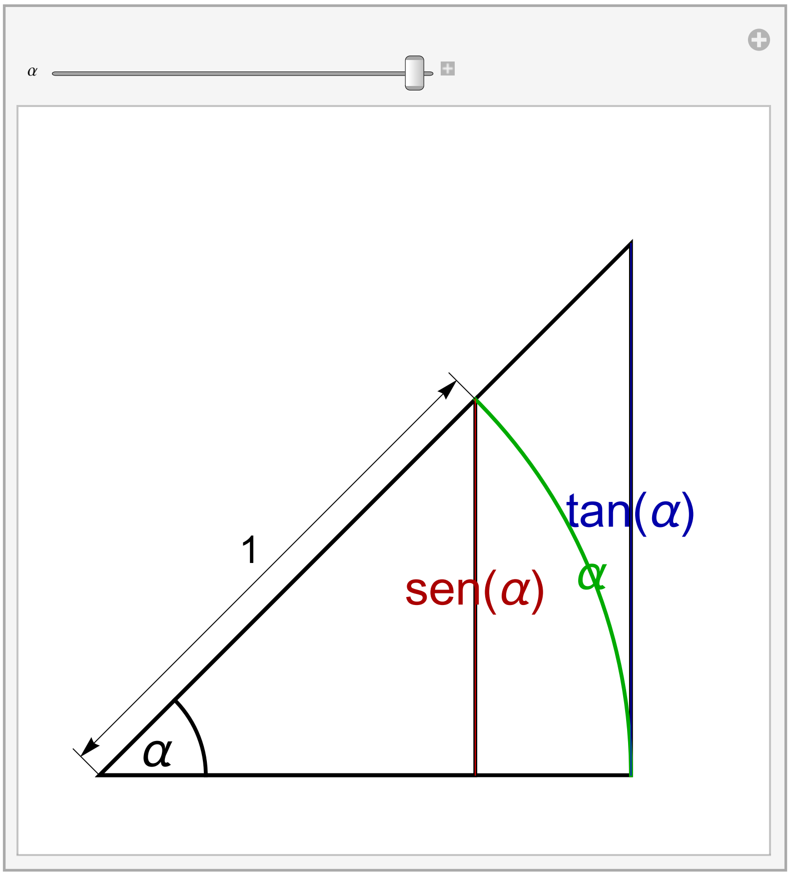
Teorema de compresión. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo que contenga a c, y $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x)$ entonces

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x)$$

Ejemplo.

Probemos el límite $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$

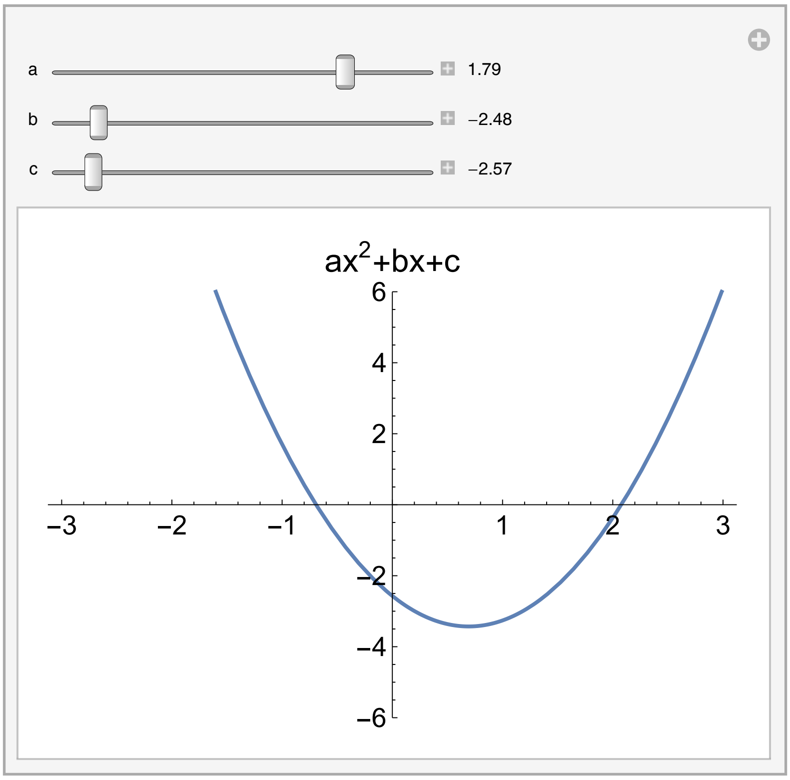
Out[88]=



Aplicación

Qué le pasa a las raices del polinomio $a x^2 + b x + c$ cuando a se hace arbitrariamente cercano a cero?

Out[89]=



Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.