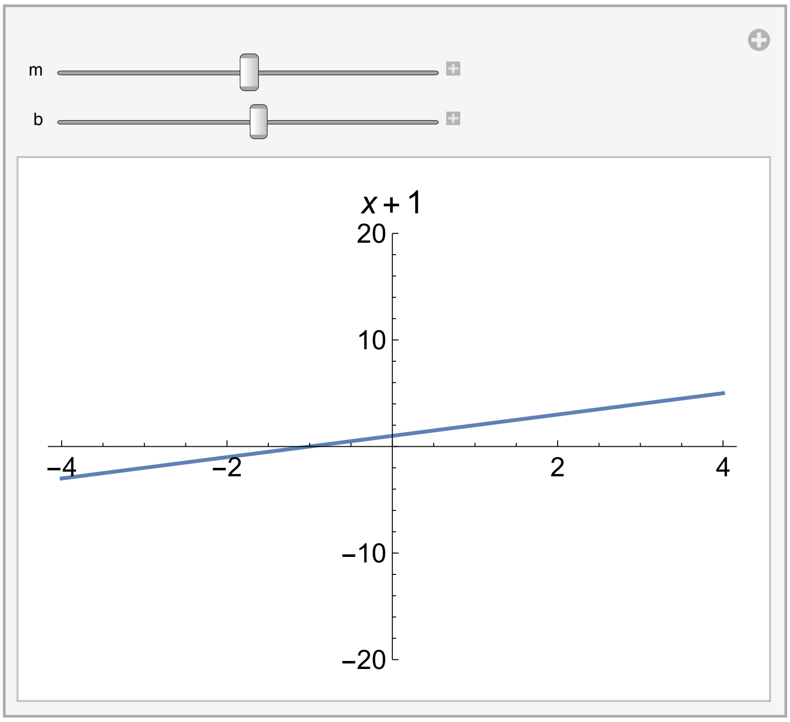
Clase 3

Catálogo de funciones básicas: polinomios, funciones de potencia, racionales, algebraicas y funciones trigonométricas.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Funciones lineales

Una función de la forma $f(x) = m x + b$ se llama lineal. El parámetro m es la pendiente de la recta, y está dada por el cociente del incremento en f sobre el incremento en x. Las funciones lineales son las únicas para las cuales este cociente es constante. El parámetro b es el intercepto con el eje vertical, pues: $f(0) = b$.



Ejemplo

Escala Farenheit vs Centígrados (1724). 0° F corresponden a la temperatura de congelamiento del agua con sal, igual a −17.777° C. 100° F es la temperatura de la sangre de un caballo, y corresponden a 37.7° C. Hallar la función lineal que relaciona ambas escalas.

Ejemplo

Una familia sale de paseo desde Medellín a una finca a 200 Km de Medellín en la vía que va a Cisneros. Salen tres carros:

- El carro A sale de Medellín las 8 AM y se va a una velocidad constante de 50 Km/h
- El carro B también va a velocidad constante: por Niquía (a 15 KM de Medellín) pasó a las 9 AM y llegó a Barbosa (a 45 Km de Medellín) as las 9:30 AM.
- El carro C va a velocidad de 70 Km/h pero a las 9 AM iba por Girardota (a 35 Km de Medellín) y paró por media hora.

Preguntas:

- En qué orden llegaron los carros a la finca?
- Quiénes se encontraron por el camino?

Funciones potencia

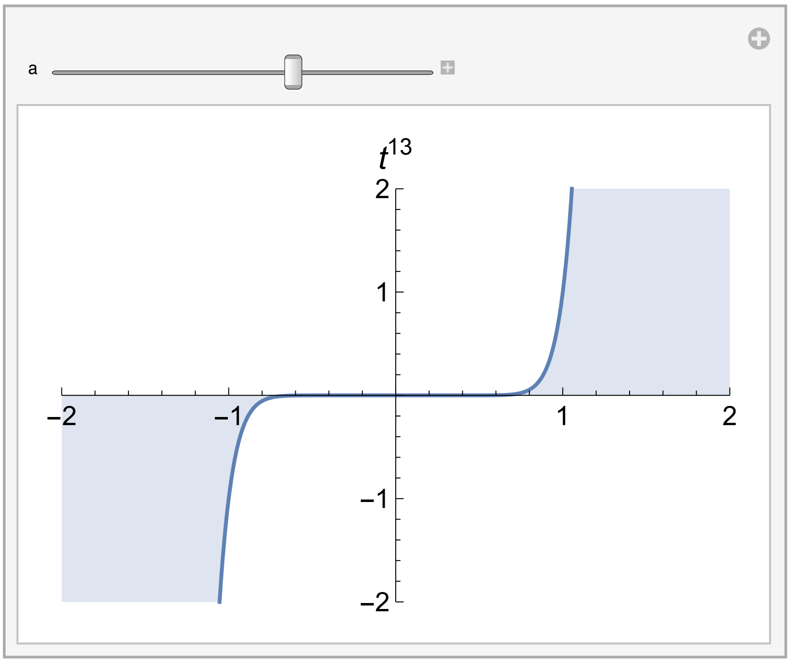
Las funciones de la forma $g(t) = t^a$ donde a es una constante. El comportamiento de la función y su dominio depende mucho del valor de a.

Propiedades:

- $t^0 = 1$
- $t^{a+b} = t^a\, t^b$
- $t^{-1} = \frac{1}{t}$
- $(t^a)^b = t^{a\,b}$

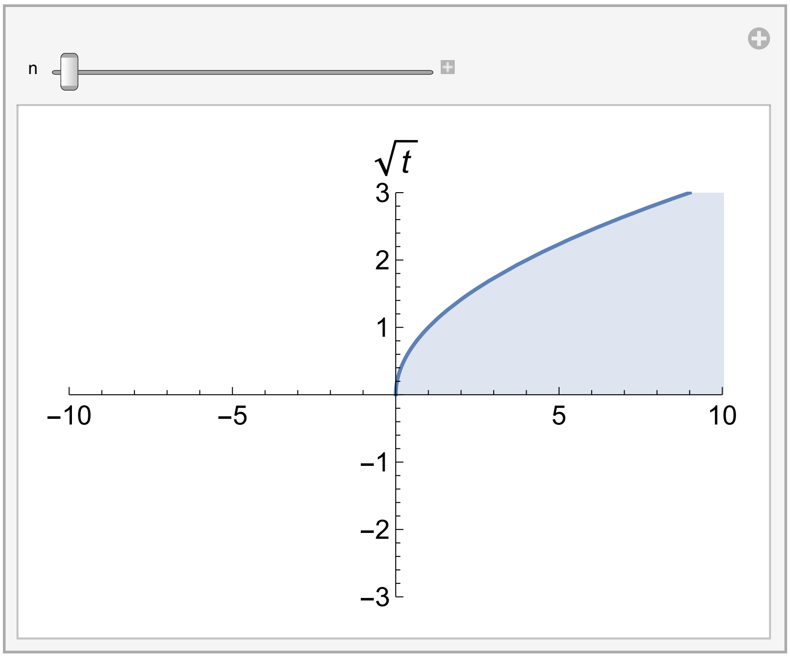
Valores enteros positivos de a

Dom(g) = ℝ, Ran(g) = ℝ si n es par, Ran(g) = $[0, \infty)$ si n es impar. Mostrar **paridad**.



Raíces, es decir $a = \frac{1}{n}$, $n \geq 0$, recuerde $t^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{t}$.

Indicar dominio, rango y paridad.

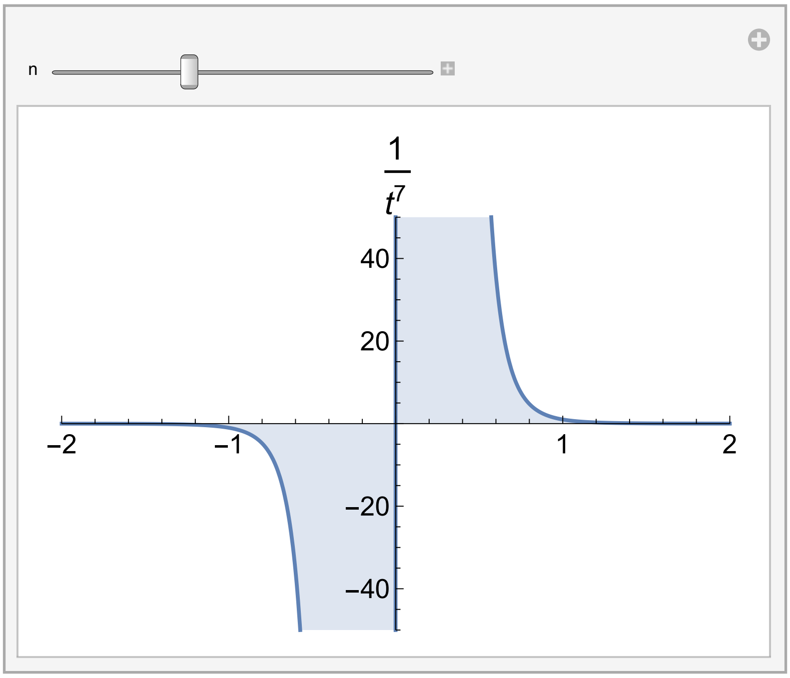


Ejemplo:

Por qué si uno escribe cualquier número en la calculadora, y oprime $\sqrt{\square}$ muchas veces, siempre resulta en el número uno?

Valores enteros negativos de a, $t^{-n} = \frac{1}{t^n}$

Indicar dominio, rango y paridad.



Polinomios

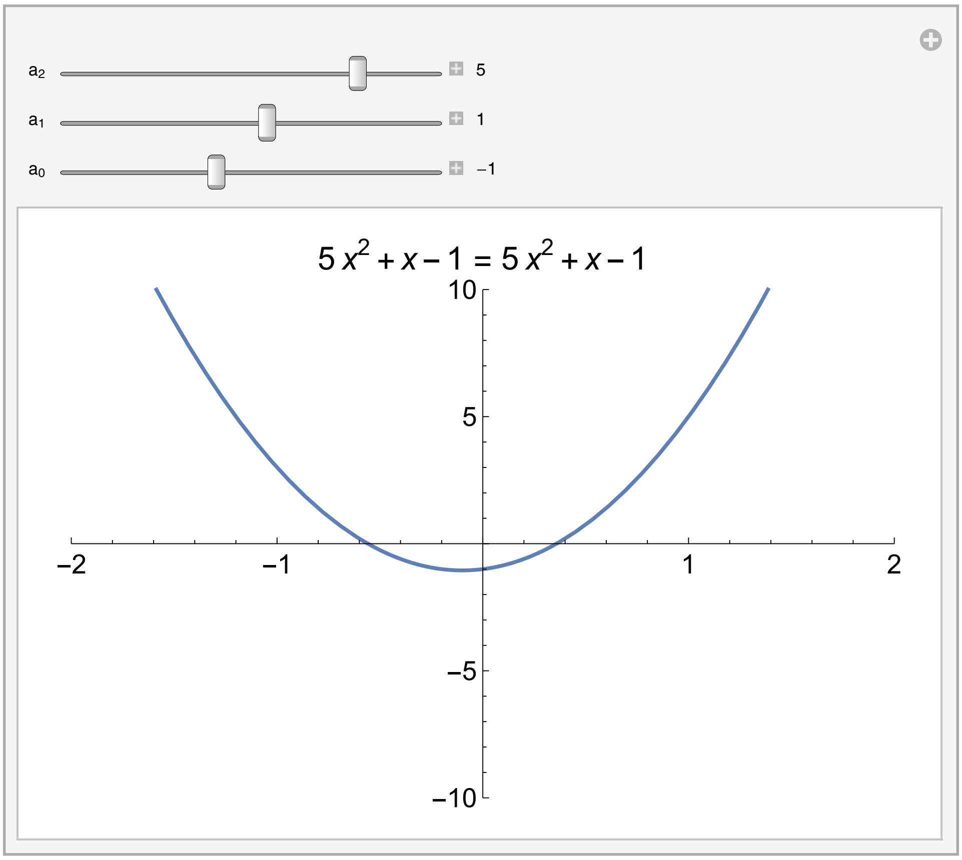
Un polinomio es una **combinación lineal** de funciones potencia. Es decir, una funcíon de la forma:

$$p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

El número n se llama el **grado** del polinomio, y $a_0, \ldots, a_n$ son fijos y se llaman los **coeficientes**.

Polinomios de grado 2.

La gráfica de un polinomio de la forma $p(x) = a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ con $a_0 \neq 0$, es una parábola. Las raíces de dicho polinomio son los números que satisfacen $p(r) = 0$. En este caso es fácil hallar las raíces usando $r = \frac{1}{2\, a_2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1{}^2 - 4\, a_2\, a_0}\right)$. Si las dos raíces son reales, la parábola cruza el eje horizontal en dos puntos, si existe sólo una ráiz doble, la parábola toca tangencialmente el eje horizontal, por último, si no hay raíces reales, la párabola no se intercta con el eje horizontal.



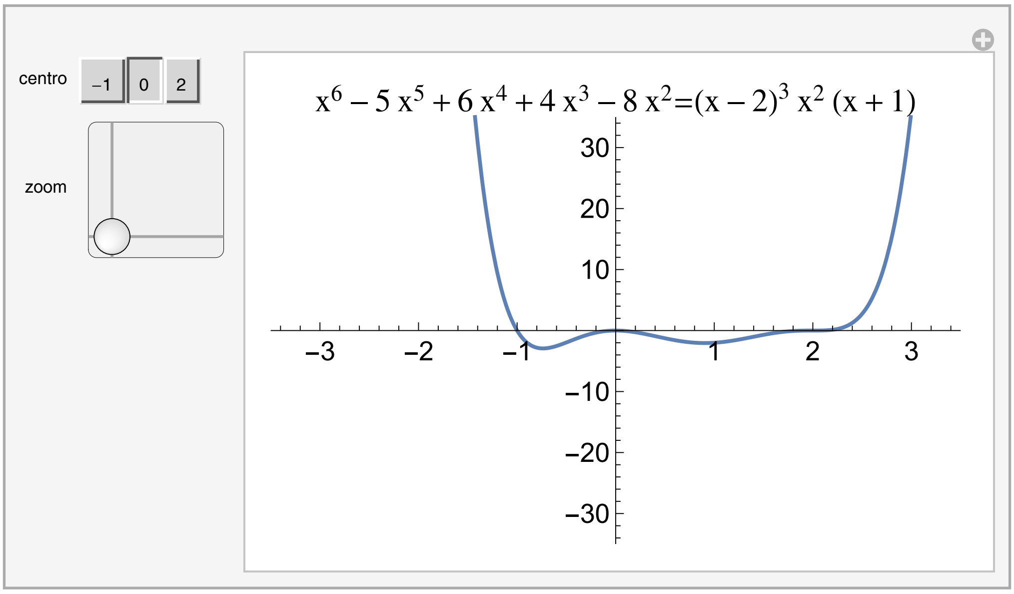
Comportamiento local y global de los polinomios.

Un polinomio dado por: $p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0, \quad a_n \neq 0$, es dominado para x muy positivas y muy negativas, por el término $a_n\, x^n$. La gráfica de todos los polinoio de grado 6, si se miran en intervalos de x suficientemente grandes, parecen la gráca de $f(x) = x^6$.

Un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n raíces distintas. En general, un polinomio tiene m raíces distintas, se puede puede factorizar como:

$$p(x) = (x - r_1)^{n_1}\, (x - r_2)^{n_2} \ldots (x - r_m)^{n_m}\, q(x)$$

donde $q(x)$ es un polinomio de grado N tal que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m + N$. Para x cercanos a r_i el comportamiento de $p(x)$ está determinado por el término $(x - r_i)^{n_i}$, por esto, haciendo zoom en la gráfica cerca a r_1, se ve que $p(x)$ toca el eje horizontal de la misma manera que el polinomio $(x - r_i)^{n_i}$ lo haría.



Esta demostración permite hacer zoom sobre cualquier punto de la gráfica del polinomio $p(x)$. El "centro" denota el valor de x en el centro de la gráfica. El bolita azul se mueve en cualquier dirección: hacia la derecha hace zoom en el eje horizontal, y hacia arriba hace zoom en el eje vertical. Si se mueve a lo largo de la diagonal de cuadro, hace zoom proporcional en ambas direcciones.

Ejemplo:

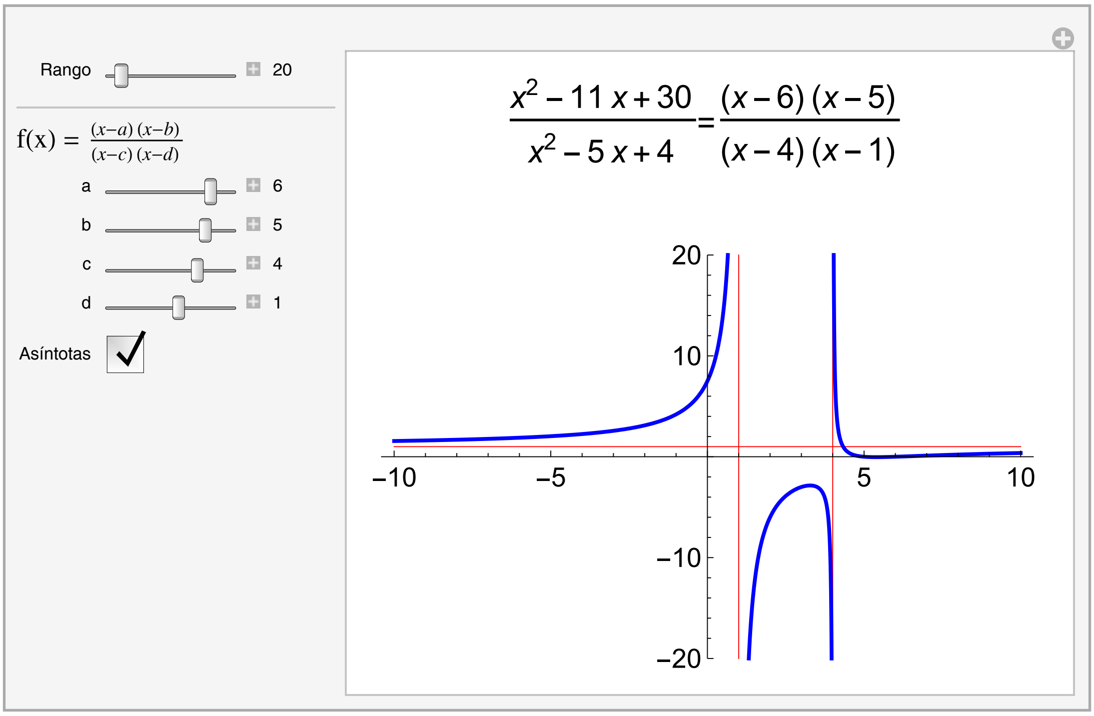
Se lanza un proyectil con un ángulo de θ respecto a la horizontal y velocidad v. El piso tiene una pendiente de 5%. La trayectoria sigue la siguiente función:

$$y(x) = \frac{-g \sec^2(\theta)}{2 v^2} x^2 + x \tan(\theta)$$

Halle el punto en el cual el proyectil impactó el piso.

Funciones Racionales

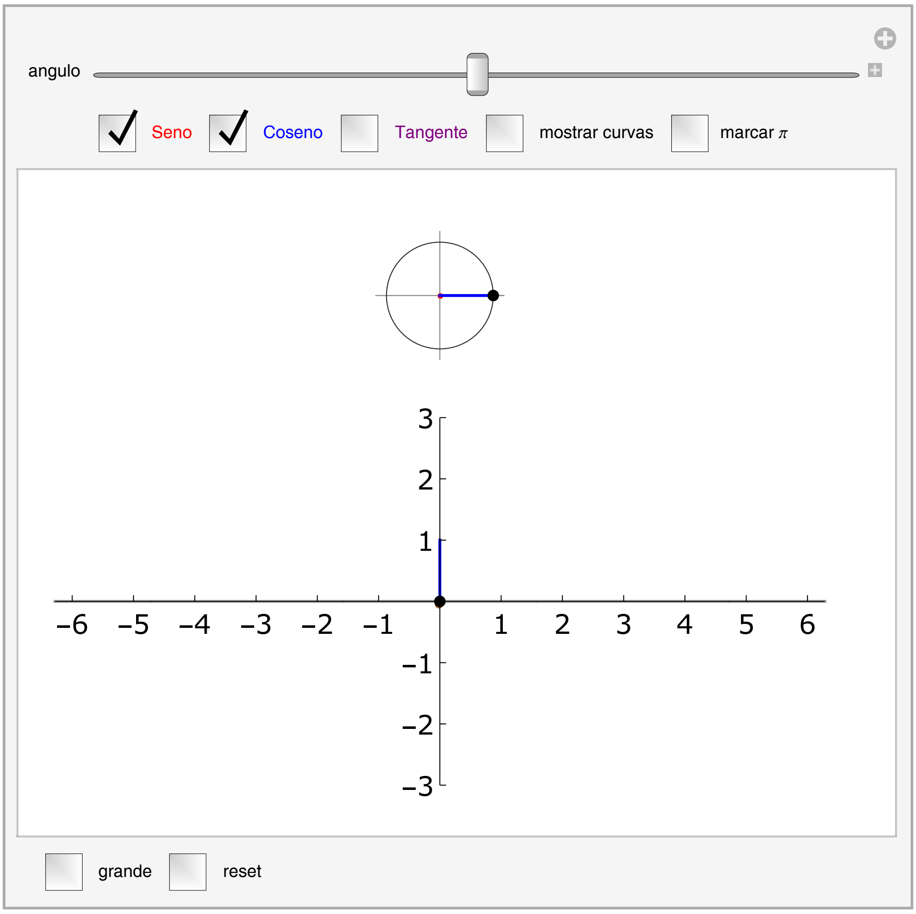
Las funciones de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios, se llaman funciones racionales. Su comportamiento y dominio depende mucho de q, en particular, si $q(r) = 0$, entonces r no es un elemento del dominio de f.



Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas se definen sobre el círculo unitario.

- Un radián es el ángulo correspondiente al arco que mide una unidad.
- El seno es la longitud del cateto opuesto
- El coseno es la longitud del cateto adyacente.
- La tangente es la pendiente de la hipotenusa.
- Siempre se cumple: $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.



Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.