Clase 24

La regla de L'Hospital

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Historia

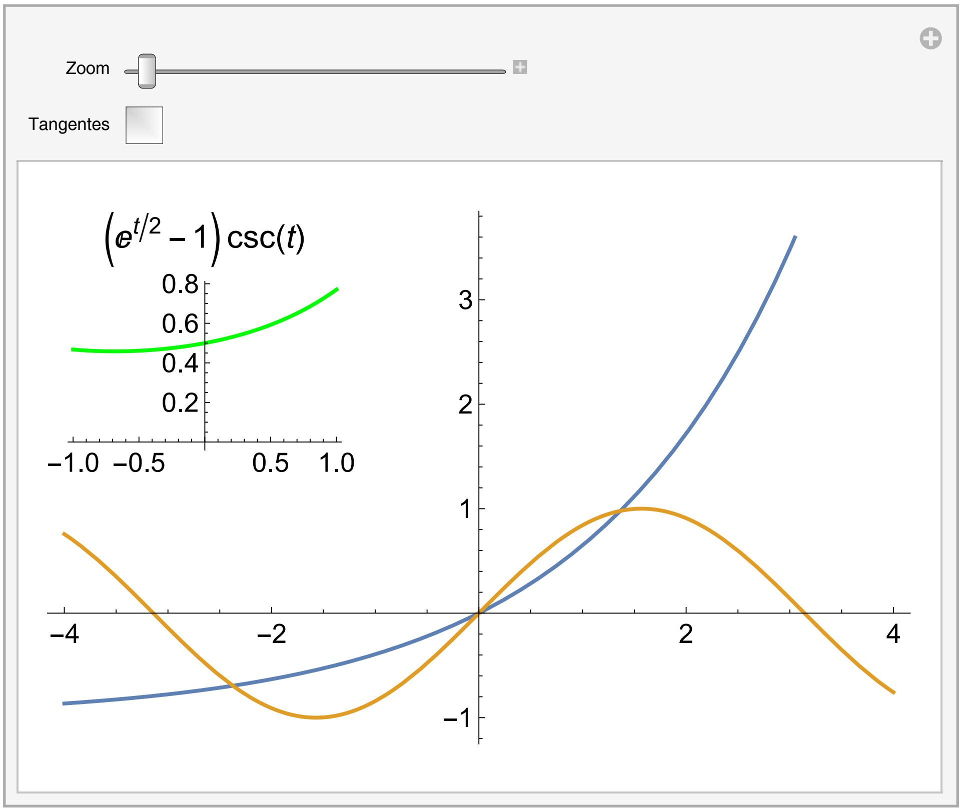
Johann Bernoulli fue contratado por el Marqués Guillaume de L'Hospital para que trabajara en matemáticas y le diera clases particulares de cálculo y le comunicara "exclusivamente sus descubrimientos". El Marqués publicó las notas de clase y algunos de los descibrimientos de Johann en 1696. Este fue el primer libro de Cálculo de la historia y se llamó: **"Análisis de lo infinitamente pequeño para el conocimiento de las líneas curvas"**.

Aunque el Marqués les da crédito a los Bernoullis, Newton y Leibniz al final del libro, Jhoann no quedó contento y lo acusó de haberle robado el fruto de su talento. Pero la verdad es que el Marqués fue honesto, un buen estudiante y le pagó bien (300 libras/mes).

Límites de cocientes

El cociente de dos funciones que se acercan a cero.

Out[28]=



Teorema I

Suponga que f y g son diferenciables en $x = a$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el segundo límite existe o es igual a $\pm\infty$.

La **idea** es la de aproximación por la recta tangente:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(a)+f'(a)(x-a)}{g(a)+g'(a)(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \approx \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ para } x \approx a.$$

Ejemplos

```
f0[x_] := (e^(1/2 x) - 1)/Sin[x];
L0 = Limit[f0[x], x → 0];

f1[x_] := Sin[x]/((x + 1)^2 - 1);
L1 = Limit[f1[x], x → 0];

f2[x_] := Log[x]/(x + 1)^3;
L2 = Limit[f2[x], x → 1];
```

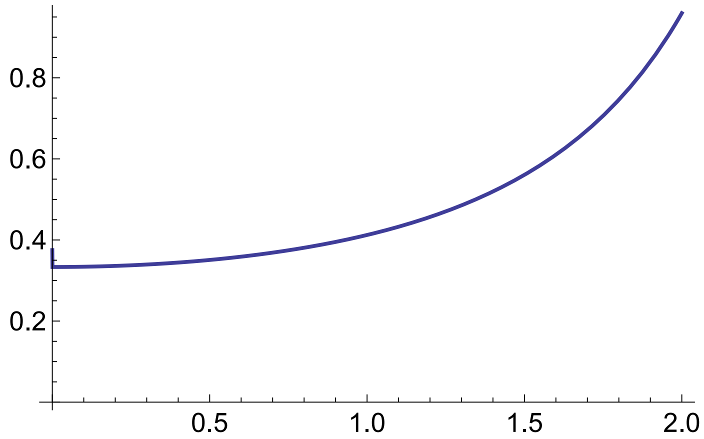
```
f3[x_] := 1/Sin[x] - 1/x;
L3 = Limit[f3[x], x → 0];
```

Uno sorprendente

Uno creería que ste límite debe ser igual a cero, pues sin(x) ≈ x para $x \approx 0$, pero no. La gráfica muestra que parece ser igual a un número menor que 0.4.

```
LS = Limit[1/Sin[x]^2 - 1/x^2, x → 0];
```

```
Plot[{1/Sin[x]^2 - 1/x^2}, {x, 0, 2}]
```

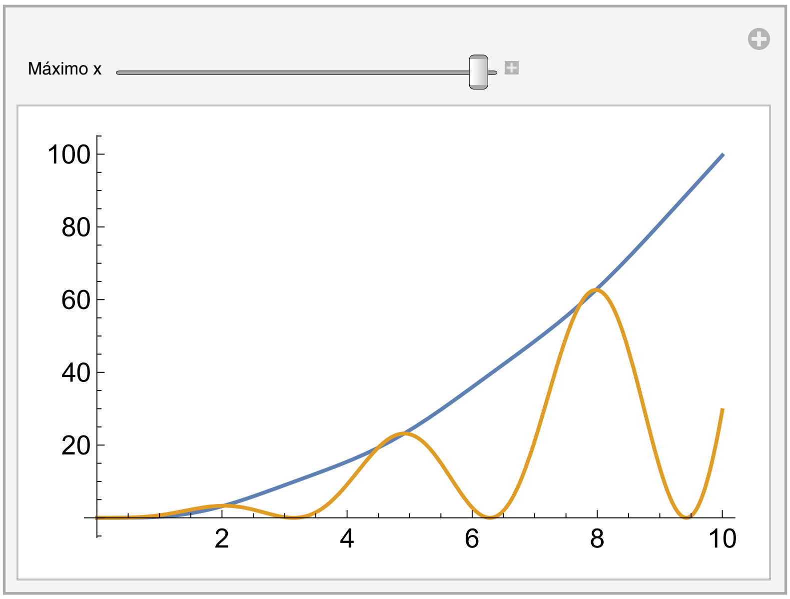


Evaluando el cociente queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$$

Acá se muestran las gráficas del numerador y el denominador. Note que las funciones son muy

```
Manipulate[
 Plot[{x^2 - Sin[x]^2, x^2 Sin[x]^2}, {x, 0, max}, PlotRange → {Automatic, Automatic}],
 {{max, 10, "Máximo x"}, 0.001, 10}
]
```



Evaluemos las derivadas para la regla de L'Hospital con el computador.

Número de derivadas 1 2 3 4

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\,x - 2\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]}{2\,x^2\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x] + 2\,x\,\mathrm{Sin}[x]^2}$$

El cociente de dos funciones que se acercan a ±∞.

Teorema 2

Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ si el segundo límite existe o es igual a $\pm\infty$.

Esto es cierto por el **Teorema 1**. Supongamos que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existen, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^2$$

Ejemplos

```
f4[x_] := x Log[x]

L4 = Limit[f4[x], x → 0];

f5[x_] := Tan[3 x]/Tan[x] (*usar LH y después y→x-π/2*)

L5 = Limit[f5[x], x → π/2];
```

El cociente de dos funciones cuando x→±∞.

Teorema 3

Suponga que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$ existen o son iguales a $\pm\infty$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ si el segundo límite existe o es igual a $\pm\infty$.

Esto es cierto por los **Teorema 1 y 2** y la regla de la cadena: supongamos que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existen, entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} \lim_{x\to 0} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplos

```
f6[x_] := e^x/x^2;

f7[x_] := Log[x]/x^(1/2);
```

```
f8[x_] := (x - Sin[x])/(x + Sin[x]);(*NO SE PUEDEN APLICAR LH*)
L8 = Limit[f8[x], x → ∞];

f9[x_] := Sqrt[x^2 + x] - x

L8 = Limit[f9[x], x → ∞];
```

$$f8[x\_] := \frac{x - \text{Sin}[x]}{x + \text{Sin}[x]}$$

$$f9[x\_] := \sqrt{x^2 + x} - x$$

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.