

Clase 5

Álgebra de funciones, composición de funciones.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
Todos los derechos reservados.

Operaciones algebraicas

Definición

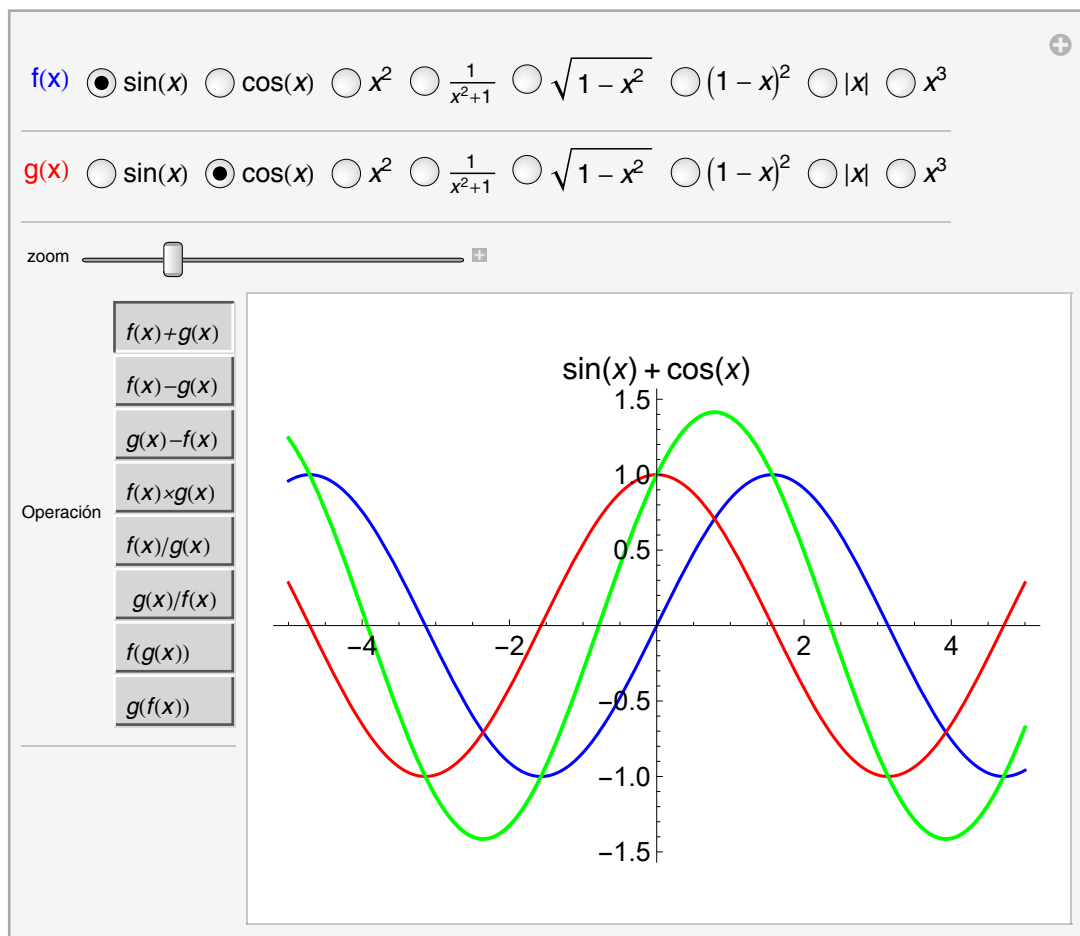
Sean f, g funciones. Definimos las siguientes funciones:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$,
- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, $\text{Dom}(f \times g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x \in \text{Dom}(g) : g(x) = 0\}$

Ejemplos gráficos:

En la siguiente demostración es interesante:

- restricción del dominio usando $\sqrt{1 - x^2}$
- Modulación de la amplitud
- $x^2 / |x|$



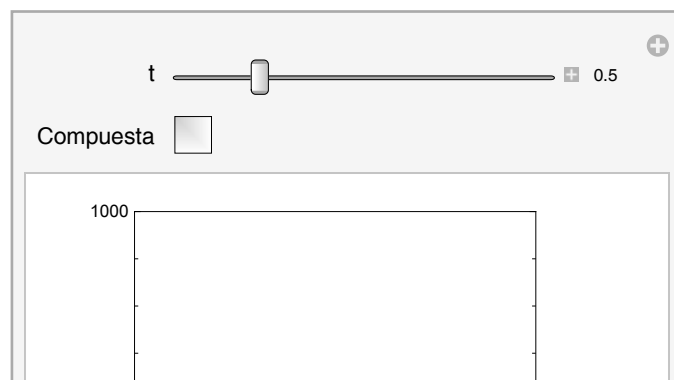
Composición de funciones

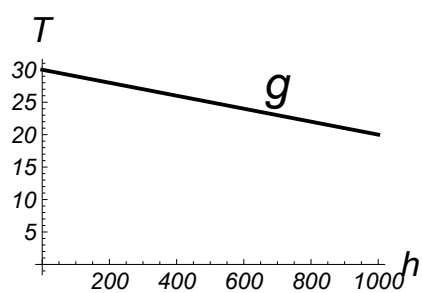
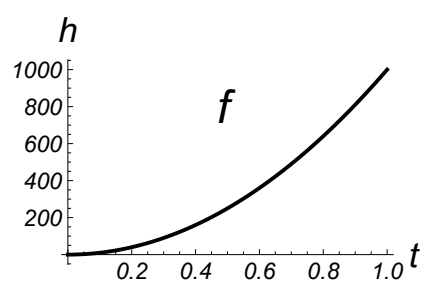
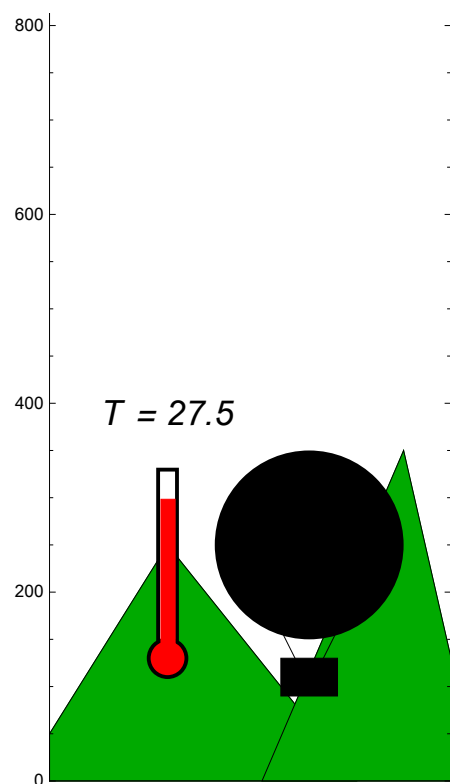
Es algo muy natural: mostrar los pasos de cómo se calcula $f(x) = \sqrt{\sin(x+1)}$ como una sucesión de cálculos, donde cada cálculo es la aplicación de una función:

$$x \rightarrow x+1 \rightarrow \sin(x+1) \rightarrow \sqrt{\sin(x+1)}$$

Ejemplo:

La temperatura del aire para la persona en un globo que sube es función del tiempo: es la composición de la altura como función del tiempo $h = f(t)$, y la temperatura como función de la altura $T = g(h)$.





Definición

Dadas funciones f y g , se define la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Su dominio es:

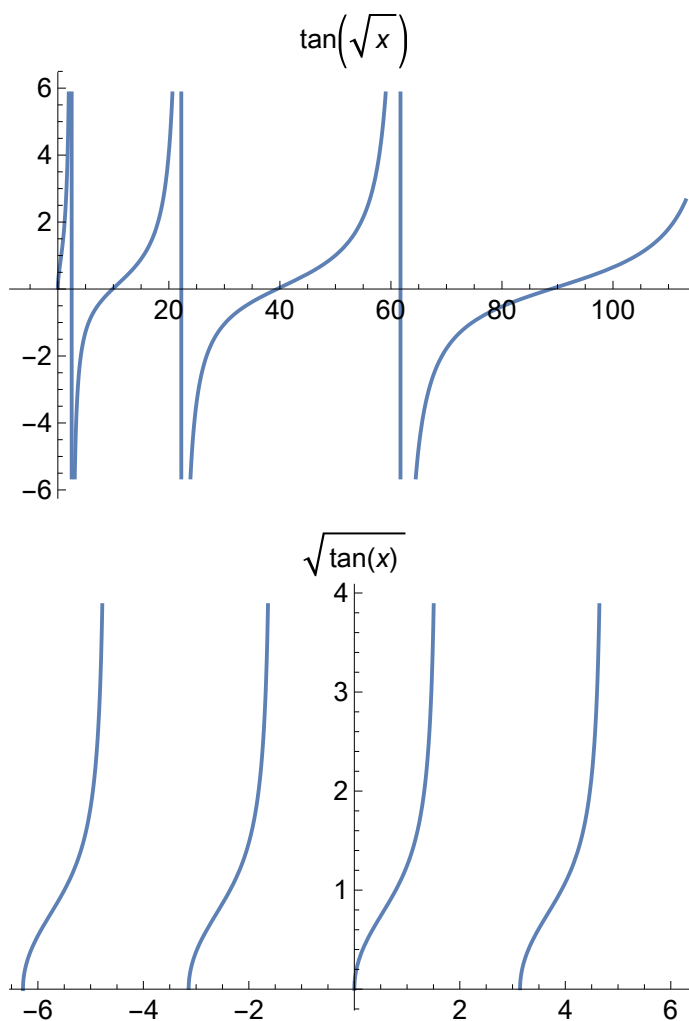
$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) : g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

Ejemplos

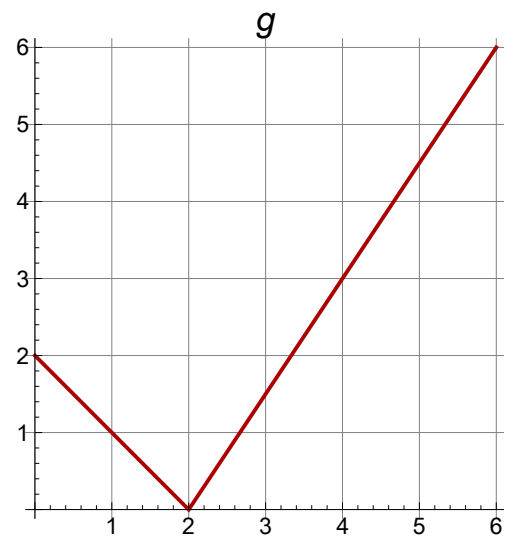
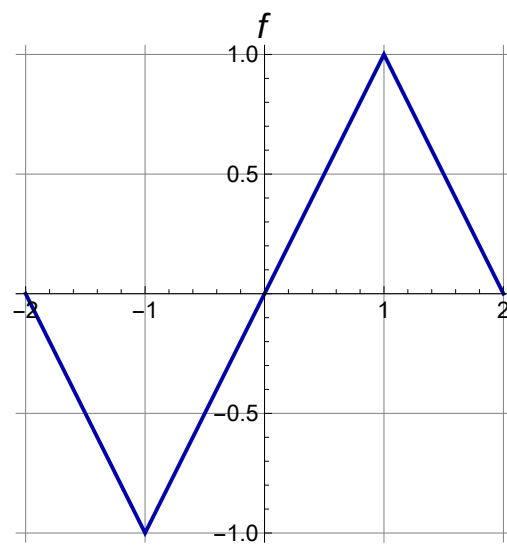
Con $f = \tan$, $g(x) = \sqrt{x}$, calcular la fórmula, dominios y mostrar la gráfica de $g \circ f$ y $f \circ g$.

`Plot[Tan[Sqrt[x]], {x, -2 Pi, 36 Pi}, PlotLabel -> Style[Tan[Sqrt[x]], 14]]`

`Plot[Sqrt[Tan[x]], {x, -2 Pi, 2 Pi}, PlotLabel -> Style[Sqrt[Tan[x]], 14]]`



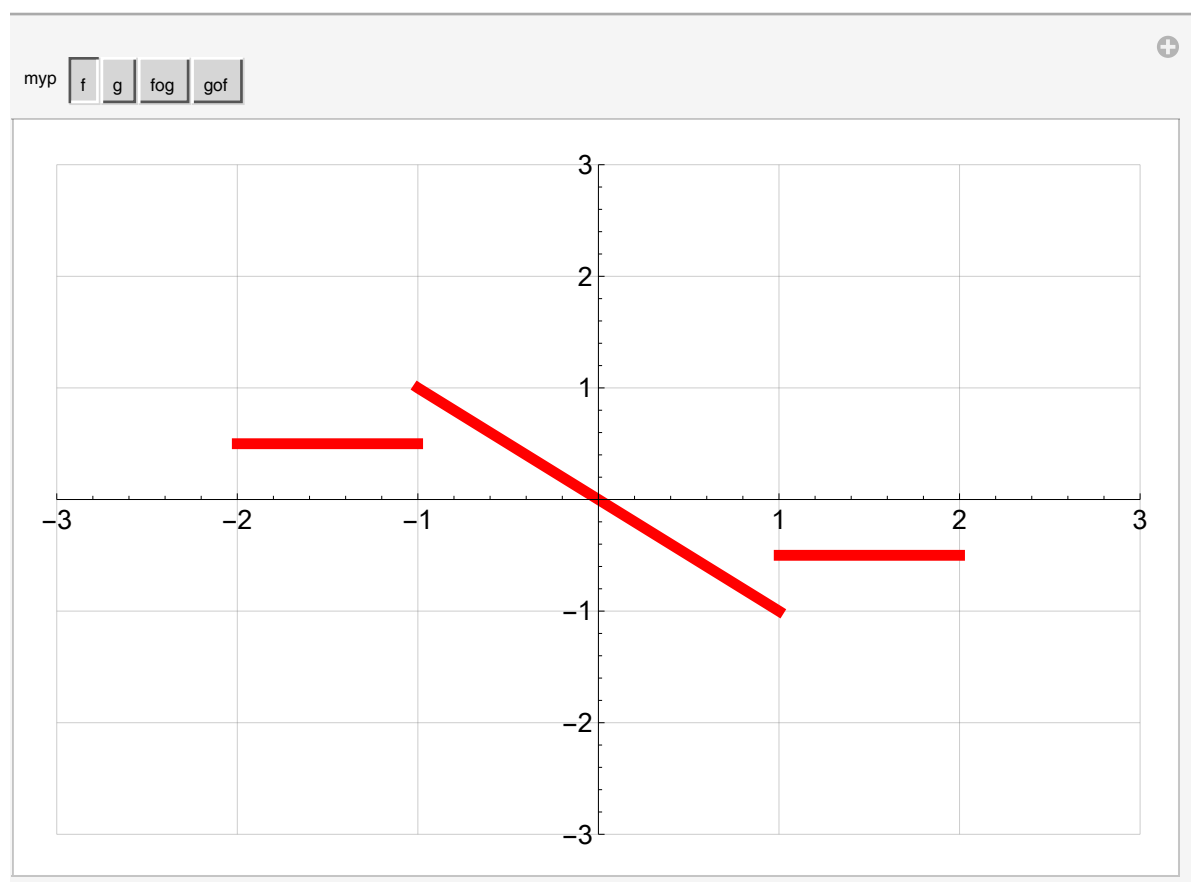
- A partir de fórmulas: qué pasa si se componen dos funciones lineales?
- A partir de gráficas: hallar las gráficas de $g \circ f$ y $f \circ g$



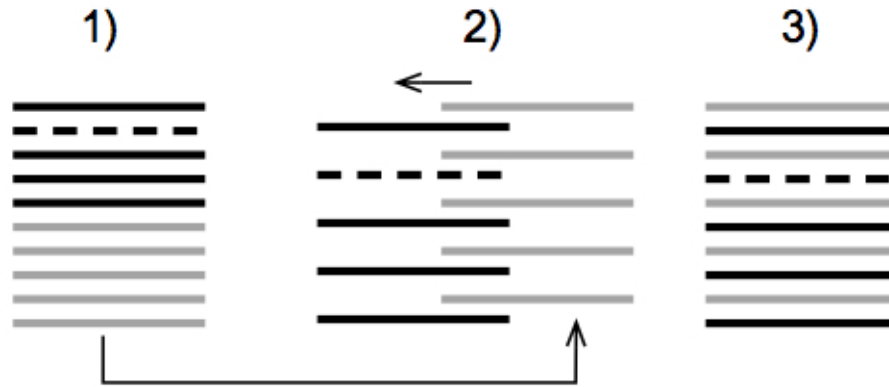
- A partir de fórmulas: hallar las fórmulas de $g \circ f$ y $f \circ g$.

$$f(x) = \begin{cases} 0.5, & 2 \leq x < -1 \\ -x, & -1 \leq x \leq 1, \\ -0.5, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = 2x + 1$$

Notar que son transformaciones elementales porque g es lineal:



- A partir de tablas. Una forma muy sencilla de revolver una baraja de N cartas (N par) es la siguiente: 1) se parte la baraja por el medio, 2) se pone cada parte lado a lado, 3) se intercalan las cartas. Ver figura siguiente. Este proceso se puede describir mediante una función: sea x la posición inicial de la carta contando de arriba abajo, y $f(x)$ su posición final. Por ejemplo, la carta punteada comenzó en la posición número dos, y terminó de cuarta, entonces $f(2) = 4$.

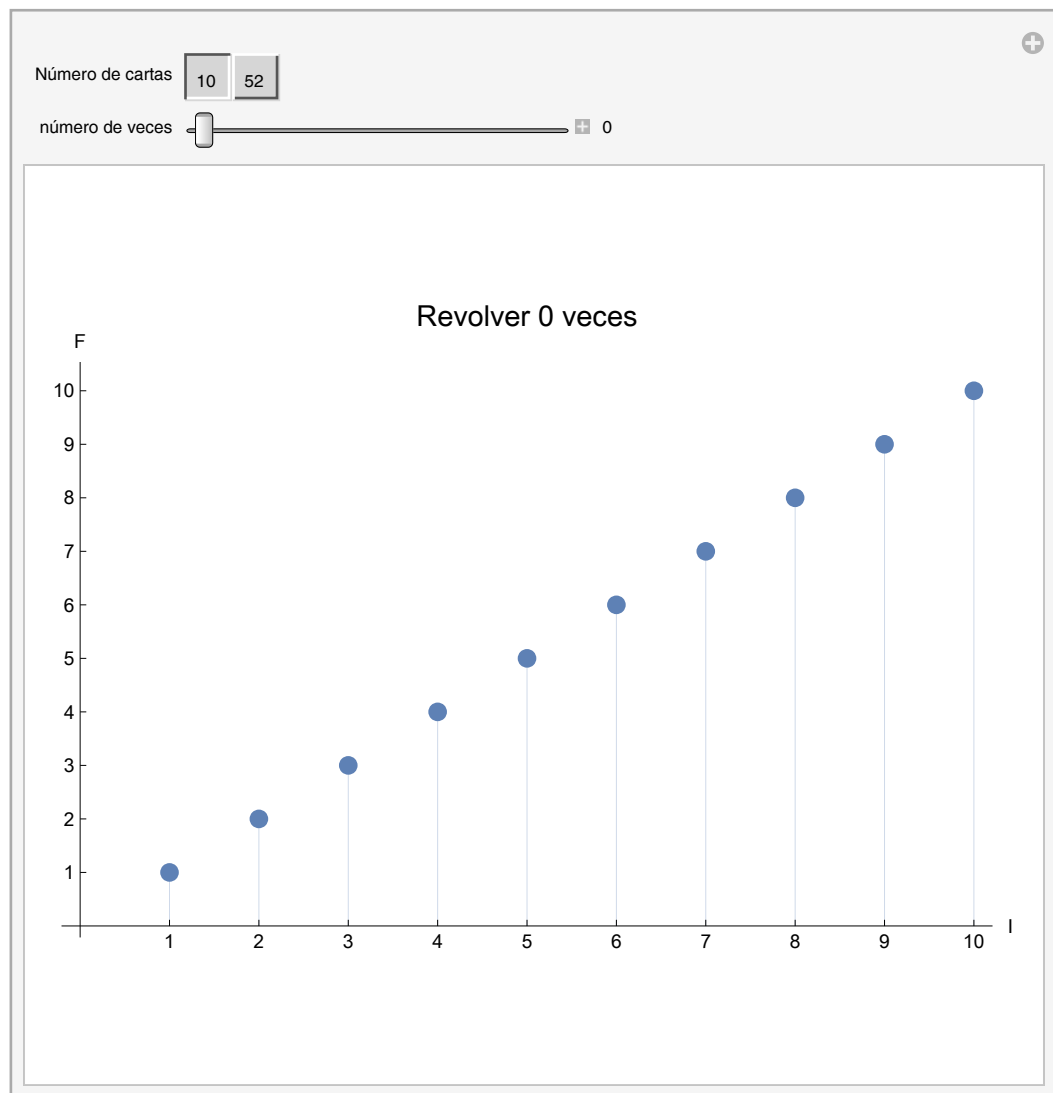


- Escribir la tabla (y fórmula) de la función f si $N = 10$.
- Revolver cartas dos veces es la función $f \circ f$. Hallar la tabla de $f \circ f$ para $N = 10$.
- La tabla y gráfica de la función "revolver n veces" son: (observar qué pasa si uno revuelve N veces)

Número de cartas

número de veces

Pos Inicial	Pos Final
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	1
7	3
8	5
9	7
10	9



Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
Todos los derechos reservados.