

Clase 16

La derivada como una función: fórmulas tablas y gráficas, crecimiento y decrecimiento, diferenciabilidad.

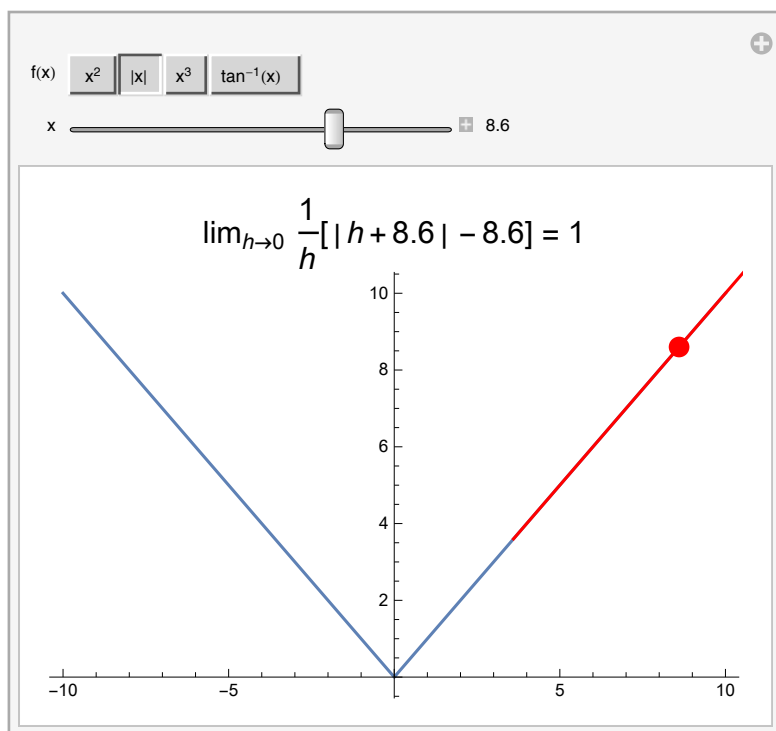
Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
Todos los derechos reservados.

La derivada como función

A partir de Fórmulas.

Para evaluar la derivada de f en $x = a$ simplemente se evalúa alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$$



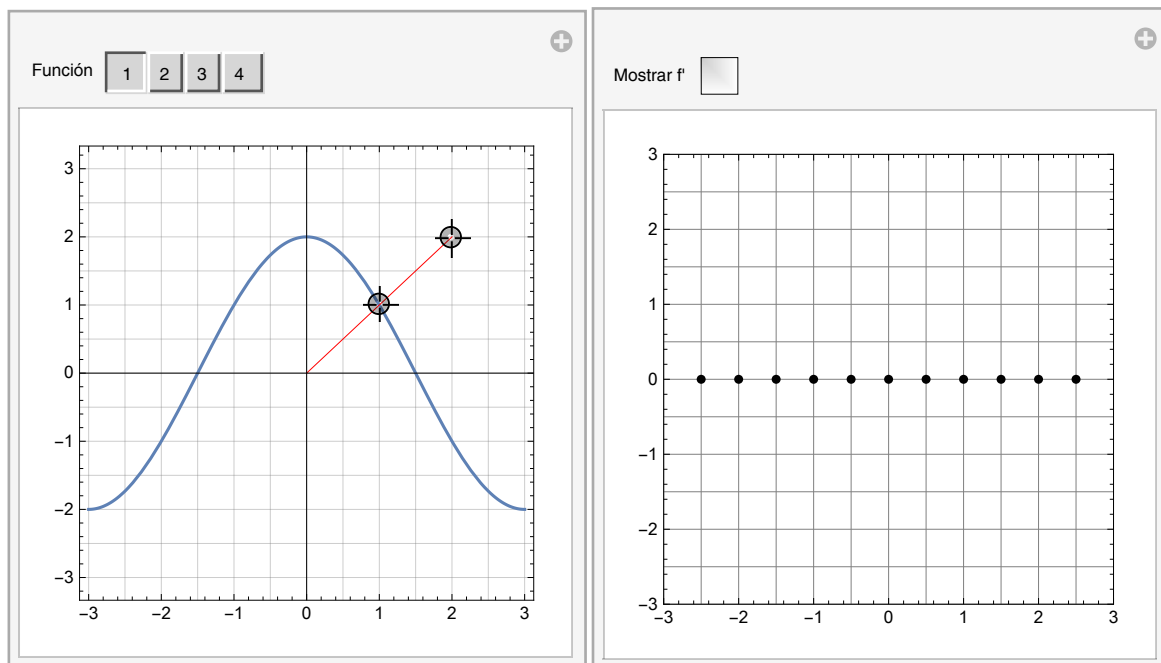
A partir de Gráficas

Información importante

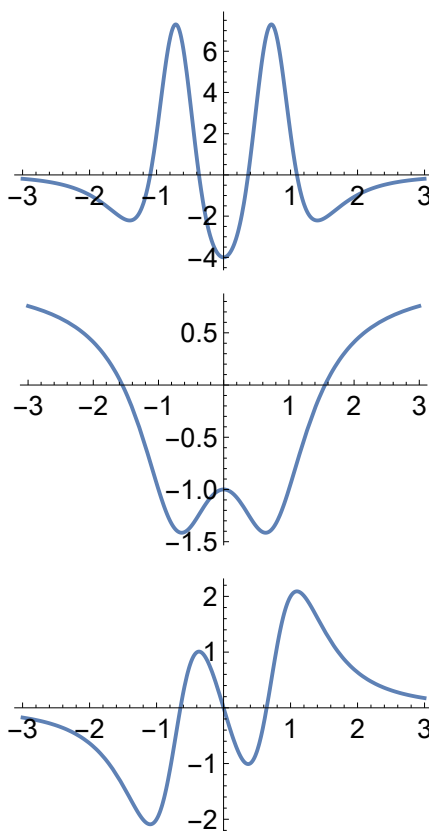
- Si $f'(a) > 0$ entonces f es creciente para $x \approx a$.
- Si $f'(a) < 0$ entonces f es decreciente para $x \approx a$.

- Si $f'(a) = 0$ entonces f tiene tangente horizontal en $x = a$.

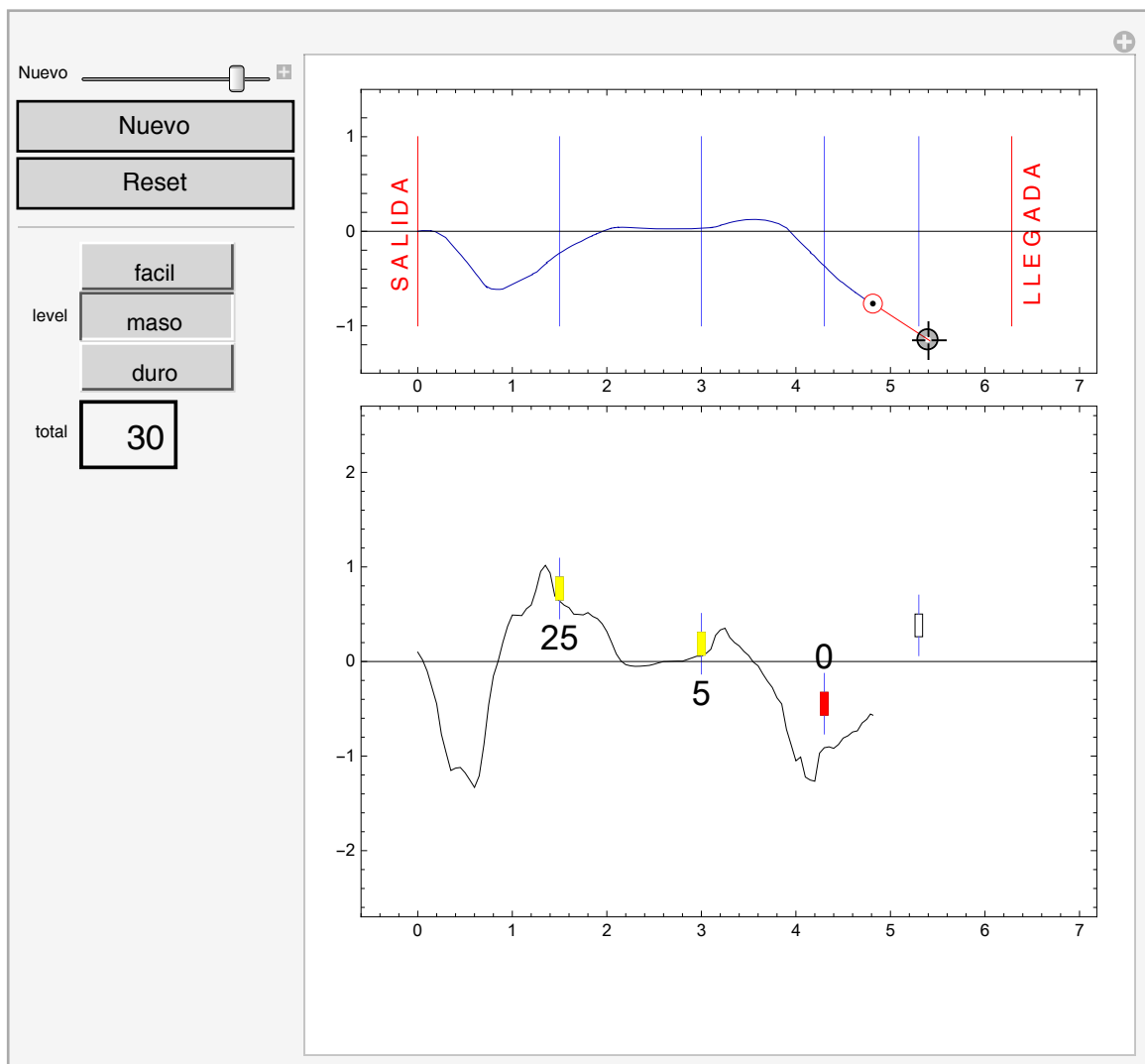
En cada punto, se puede simplemente medir la pendiente de la recta tangente.



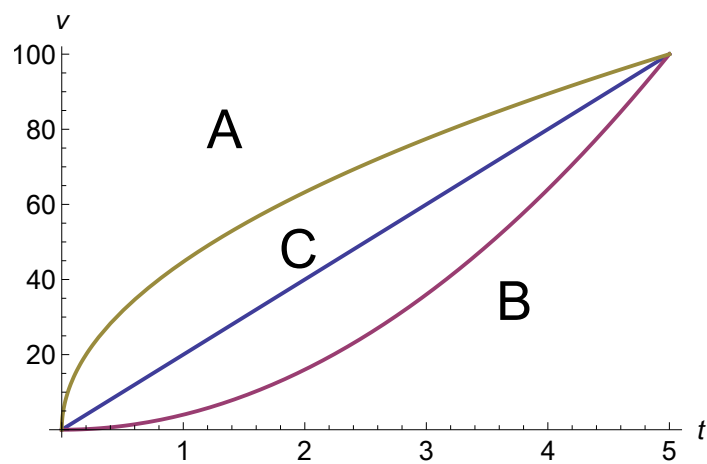
Ejemplo: Quién es la derivada de quién



Ejemplo: trazar una línea con valores de la derivada especificados.



Ejemplo: tres opciones de autos A, B, C alcanzan una velocidad de 100 Km/h en 5 segundos.Cuál escoge?



A partir de Tablas: interpolando

En 2011, Usain Bolt rompió el record de los 100 metros planos con los siguientes tiempos:

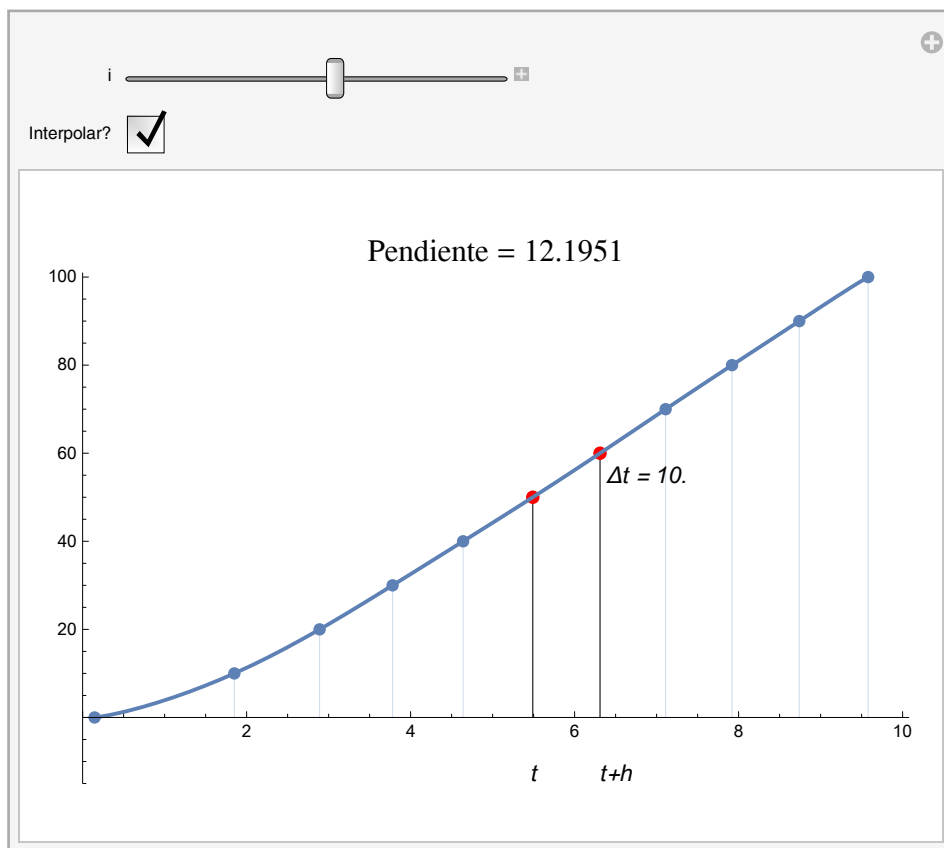
Tiempo	Distancia
0.146	0
1.85	10
2.89	20
3.78	30
4.64	40
5.49	50
6.31	60
7.11	70
7.92	80
8.74	90
9.58	100

Si queremos calcular la velocidad de Usain Bolt, podemos **estimar** la derivada de la función distancia.

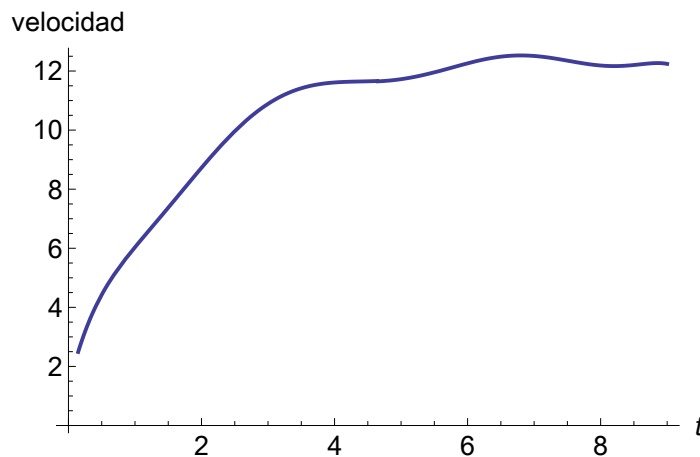
En principio, lo único que se puede hacer es calcular las velocidades medias entre los tiempos de medición. Otra opción es interpolar los puntos dados en la tabla y derivar la resultante función:

bolt

```
{ {0.146, 0}, {1.85, 10}, {2.89, 20}, {3.78, 30}, {4.64, 40},  
  {5.49, 50}, {6.31, 60}, {7.11, 70}, {7.92, 80}, {8.74, 90}, {9.58, 100} }
```



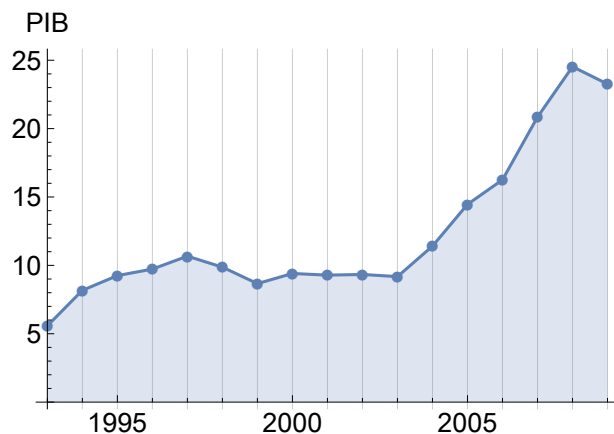
```
Plot[interp'[x], {x, 0.146, 9}, AxesLabel -> {t, "velocidad"}]
```



A partir de Tablas: diferencias finitas

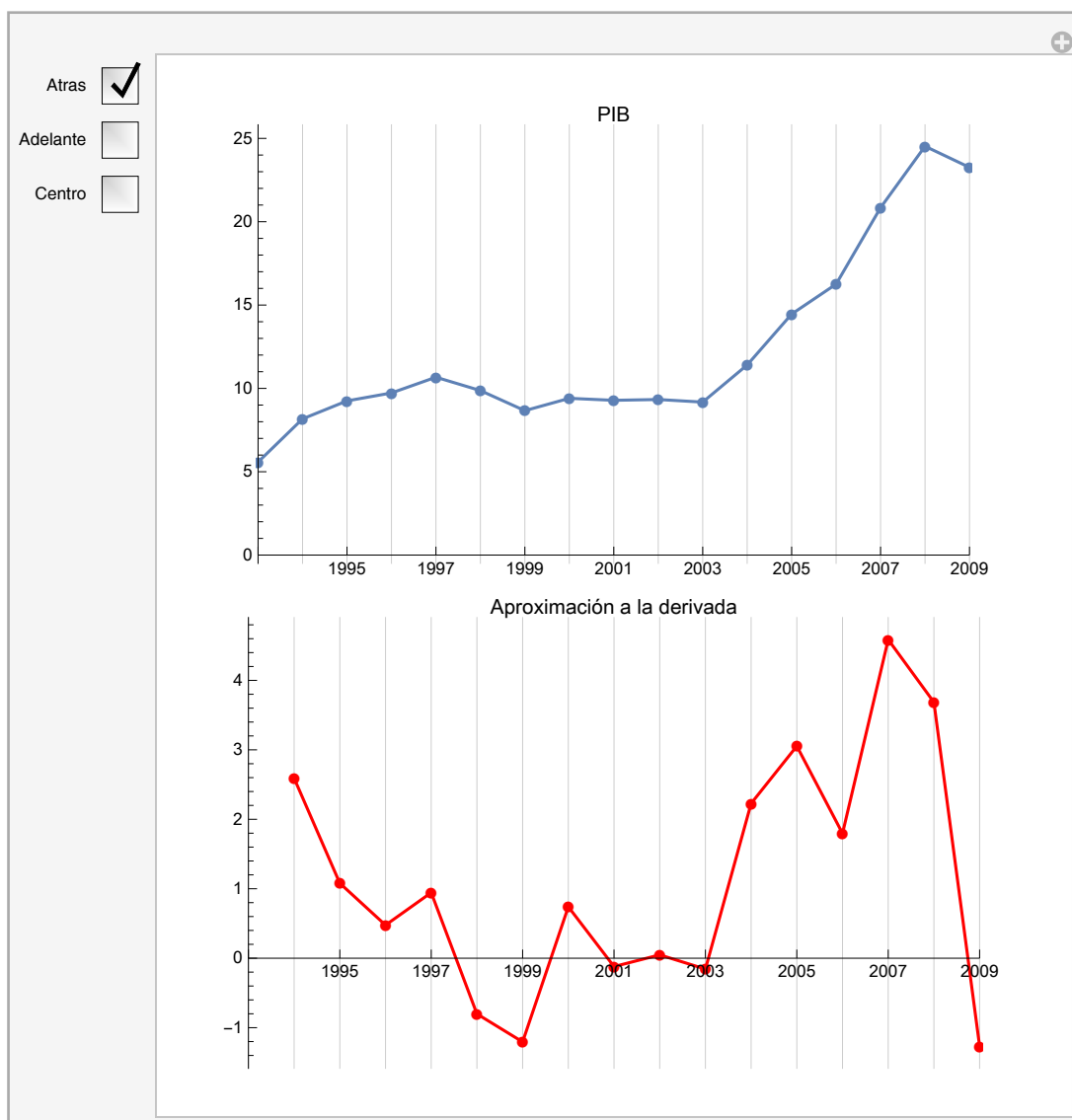
La siguiente tabla muestra el PIB Colombiano en función del año: $\text{PIB} = f(t)$.

Año	PIB $\times 10^{10}$
1993	5.57977
1994	8.17095
1995	9.25045
1996	9.72694
1997	10.6715
1998	9.86968
1999	8.665
2000	9.40524
2001	9.28512
2002	9.3334
2003	9.17705
2004	11.4052
2005	14.4591
2006	16.2556
2007	20.8422
2008	24.5272
2009	23.2601



No se puede calcular la derivada de f a partir de una tabla de valores. Pero si se puede aproximar. La más básica se llama **diferencias finitas** y se presenta a continuación. Suponga que el dominio de la tabla dada es $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$. Para aproximar $f'(t_i)$ se puede usar como estimativo del cambio en f a una de las siguientes diferencias: $f(t_i) - f(t_{i-1})$, $f(t_{i+1}) - f(t_i)$ o $f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})$. Estas resultan en las aproximaciones por detrás, por delante, y por el medio, respectivamente para $f'(t_i)$.

Por detrás: $f'(t_i) \approx \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$, Por delante: $f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$, Por el medio: $f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1}))}{t_{i+1} - t_{i-1}}$



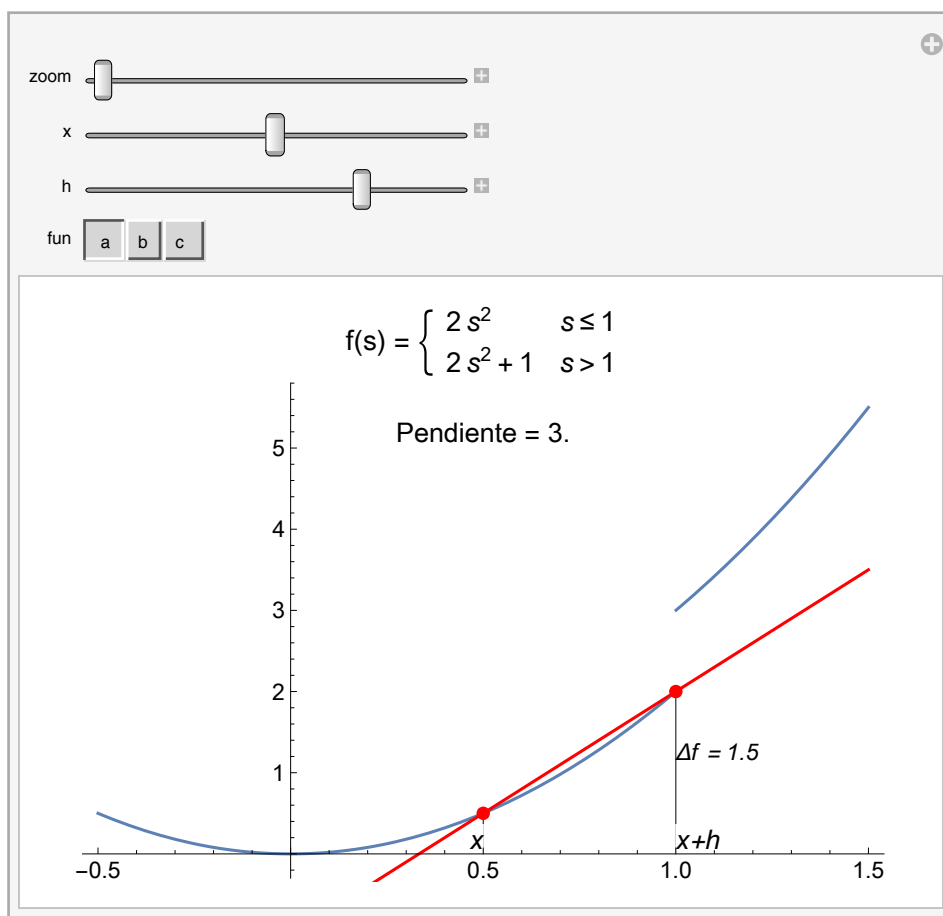
Ejemplos de funciones no diferenciables

Es posible que el límite:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

no exista, por cualquier razón que los límites pueden dejar de existir:

- $a \notin \text{Dom}(f)$. Por tanto $\text{Dom}(f')$...
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) \neq 0$ entonces el límite no puede existir. **Si f no es continua en $x = a$, entonces no es diferenciable.**
- Puede ser que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ no exista por que va a $\pm \infty$ aunque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$.
- Puede ser que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existan pero sean diferentes. **Se llaman derivadas laterales: $f'(a^+)$, $f'(a^-)$.**



Ejemplo: hacer la gráfica de la derivada de la función que se muestra a continuación.

