

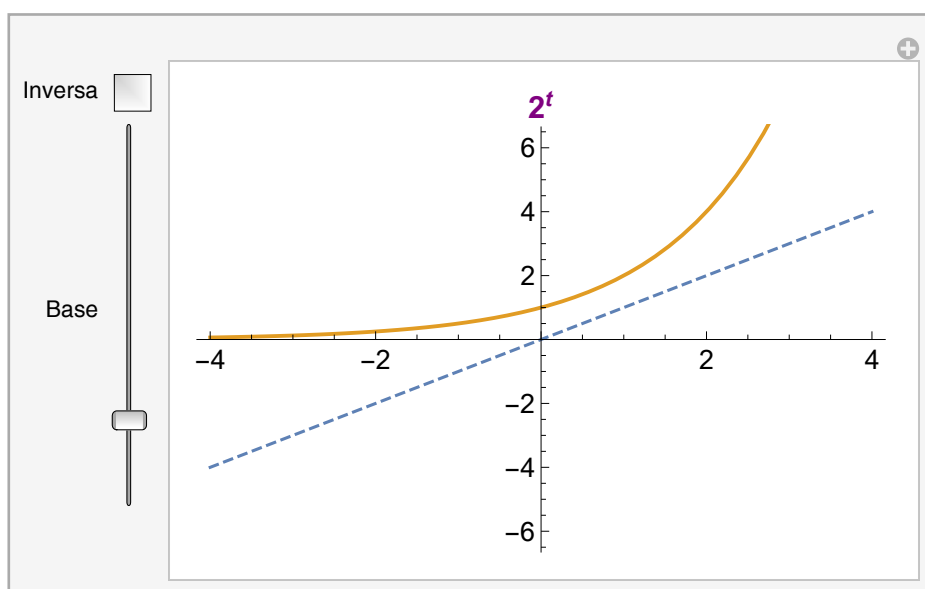
# Clase 8

Funciones logarítmicas: definición, gráficas, leyes, logaritmo natural, cambio de base, gráfica de la función logaritmo natural.

Jorge Ramirez,  
Escuela de Matemáticas,  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.  
Todos los derechos reservados.

---

Las funciones exponenciales son invertibles si  $a \neq 1$



## Recuerde:

La función inversa de  $f$  se denota como  $f^{-1}$  y está definida por:

$$f^{-1}(s) = (\text{el número } t \text{ tal que } f(t) = s)$$

$$\text{Es decir: } f^{-1}(s) = t \iff f(t) = s$$

## Ejemplo

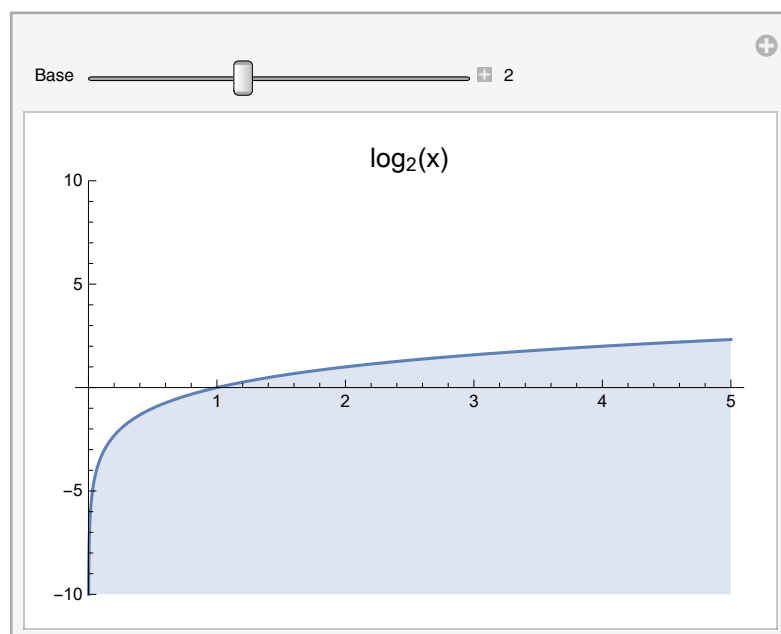
Una bola de nieve, originalmente de radio igual a un metro, se empieza a derretir, de manera que cada hora su radio se reduce en un 10%. Halle el tiempo que se demora la bola en derretirse a la mitad de su volumen original.

---

## Función logarítmica

$$f(x) = a^x \text{ entonces } f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

Como  $a^{\log_a(x)} = f(f^{-1}(x)) = x$ , entonces  
 $\log_a(x)$  = exponente al que debo elevar  $a$  para que me de  $x$



## Propiedades

- $\log_a(1) = 0$  porque  $a^0 = 1$ .
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ .  
 Esto pasa porque  $a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} a^{\log_a(y)} = xy$ .
- $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$ .  
 Esto pasa porque  $a^{y \log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^y = x^y$ . En particular  
 $\log_a(y/x) = \log_a(yx^{-1}) = \log_a(y) + \log_a(x^{-1}) = \log_a(y) - \log_a(x)$ .

## Cambio de base

Una función logarítmica  $f(x) = \log_a(x)$  se puede expresar en términos de cualquier base. Suponga que queremos usar la base  $b$  en vez de  $a$ . Entonces

$$f(x) = \log_a(x) = \log_a(b^{\log_b(x)}) = \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

Es decir, Si  $f$  es una función logarítmica,  $f$  se puede expresar en términos de cualquier base:

$$f(x) = k \log_b(x)$$

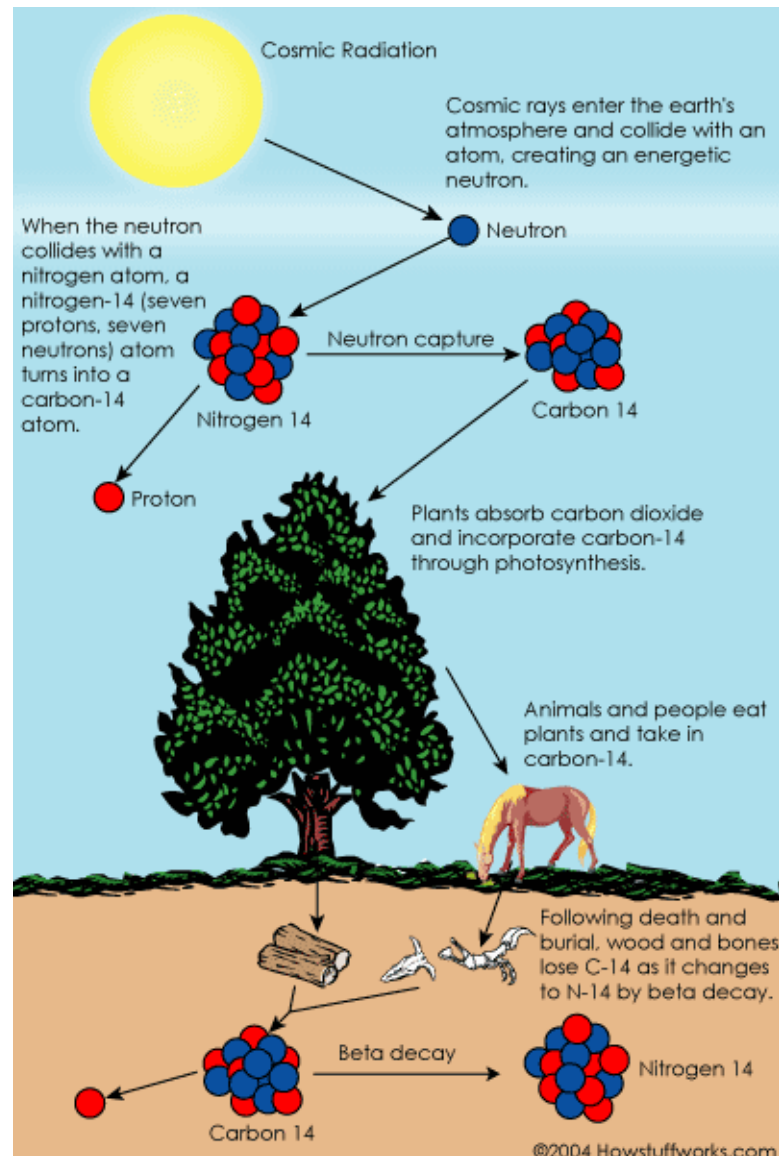
En particular, para  $b = e$ , escribimos  $f(x) = c \ln(x)$

# Para qué sirven las funciones logarítmicas

## Aplicación I: datación por Carbono 14

El Carbono 14 y el Carbono 12 son isótopos del carbono. En los 40's Willard Libby descubrió lo siguiente:

- La atmósfera contiene  $^{14}\text{C}$  y  $^{12}\text{C}$  en proporciones constantes: hay  $1.35 \times 10^{12}$  moléculas de  $^{12}\text{C}$  por cada una de  $^{14}\text{C}$ .
- Las plantas absorben ambos isótopos durante fotosíntesis, y cuando mueren, sus células quedan con ambos isótopos en la proporción estándar.
- Cuando la planta muere, para de hacer fotosíntesis y  $^{14}\text{C}$  decae exponencialmente por interacción con los rayos  $\beta$  y su vida media es  $T_{14} = 5700$  años. El  $^{12}\text{C}$  es **estable**.



### Problema:

Cuando se descubre materia orgánica con células que actualmente tengan  $^{14}\text{C}$  y  $^{12}\text{C}$  moles de Carbono 14 y 12 respectivamente, cómo se puede calcular el tiempo que ha transcurrido desde que la célula murió?

### Problema:

Basta con usar las funciones exponenciales y sus inversas.

- Hacer una tabla
- Llegar al modelo:

$$^{14}\text{C} = f(t) = f(0) 2^{\frac{-t}{T_{14}}}$$

- Hallar  $f^{-1}(x)$ , y su significado

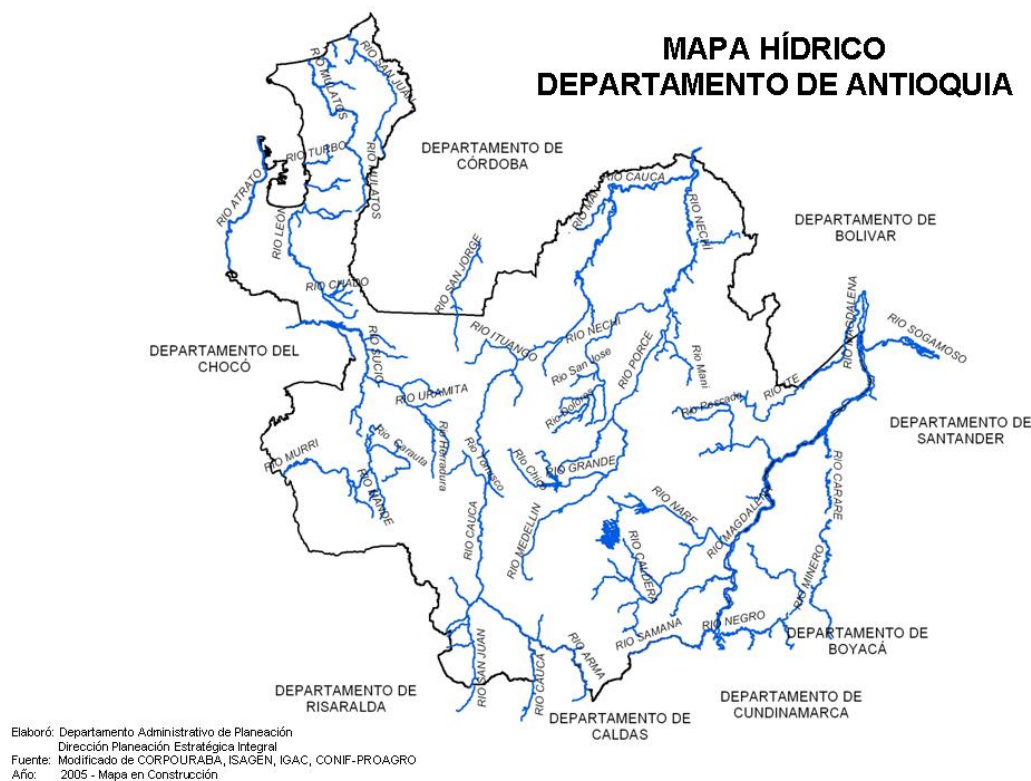
$$f^{-1}(x) = -T \log_2 \left( \frac{x}{f(0)} \right)$$

- Usando que  $f(0) = \frac{^{12}\text{C}}{1.35 \times 10^{-12}}$ . Llegar a que el tiempo desde la muerte de una muestra que actualmente tiene  $x$  moles de  $^{14}\text{C}$  es:

$$f^{-1}(x) = -T \log_2 \left( \frac{1.35 \times 10^{-12} x}{^{12}\text{C}} \right)$$

**Aplicación 2: los logaritmos sirven para describir variables que pueden ser muy grandes o muy pequeñas**

**Caudales y Area de drenaje para diferentes cuencas en Antioquia.**



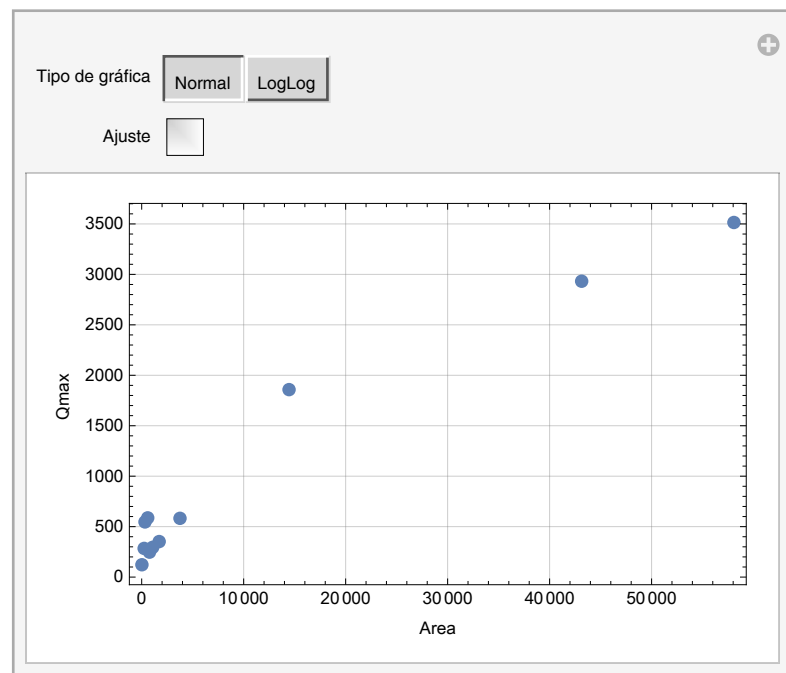
Estación	Corriente	Area Km <sup>2</sup>	Qmax m <sup>3</sup> /s	Qmin m <sup>3</sup> /s	Qmin/Qmax
PP-10 La Víbora	La Víbora	21.7	122.3	0.42	1/292
PRN-3 Cruces	Anorí	101.8	869.5	3.4	1/256
Chigorodo	Chigorodó	241.5	284.3	2.27	1/126
PRN-1 Charcon	Anorí	323.8	546.5	8.48	1/64
RN-10 Puerto Belo	San Carlos	590	586.9	17.11	1/34
PSB-2 La Guarquina	San Bartolomé	766.8	247.1	10.41	1/24
RMS-14 Yarumito	Medellín	1080.4	295.2	16.22	1/18
PSB-3 La Honda	San Bartolomé	1713.8	352.1	27.18	1/13
PP-3 Playa Dura	Porce	3755.5	582.4	75.22	1/8
La Esperanza	Nechí	14449.4	1858.0	279.47	1/7
La Coquera	Cauca	43143.6	2932.3	557.34	1/5
Las Flores	Cauca	58072.8	3514.4	807.24	1/4

A continuación se muestra una tabla de las áreas de las cuencas y el caudal máximo de 11 estaciones de medición en Antioquia. Un problema muy importante es hallar un modelo matemático para **estimar el caudal máximo en cualquier río de Antioquia**.

Río	Estación	Area	Caudal máximo
La Vibora	PP-10	21.7	122.3
Chigorodó	Chigorodó	241.5	284.3
Anorí	PRN-1	323.8	546.5
San Carlos	RN-10	590	586.9
San Bartolomé	PSB-2	766.8	247.1
Medellín	RMS-14	1080.4	295.2
San Bartolomé	PSB-3	1713.8	352.1
Porce	PP-3	3755.5	582.4
Nechí	Esperanza	14 449.4	1858.
Cauca	Coquera	43 143.6	2932.3
Cauca	Flores	58 072.8	3514.4

Cuando se grafica la tabla de Area vs Caudal máximo no se observa ninguna relación aparente entre las variables. La razón es que ambas variables varían en rangos muy amplios, desde  $10^2$  hasta  $10^5$ , o sea, tres órdenes de magnitud.

Lo que los ingenieros usualmente hacen es sacar logaritmo en base 10 a ambas variables y graficar. O equivalentemente, graficar en papel "log-log". Ahí se observan mejor los puntos, y se detecta una tendencia aproximadamente lineal.



Pero la relación lineal entre  $\log(Q)$  y  $\log(A)$ , implica una relación potencial entre  $Q$  y  $A$ :

$$\log_{10}(A) = m \log_{10}(Q) + b$$

$$\Rightarrow A = 10^{m \log_{10}(Q)} 10^b$$

$$\Rightarrow A = 10^b Q^m$$

Quedamos entonces con un modelo matemático para la predicción de caudales máximos.

## El universo tiene muchas escalas

`SystemOpen["http://htwins.net/scale2/lang.html"]`

Visitar este sitio:

<http://htwins.net/scale2/lang.html>

Si quiero definir la función

$$f(X) = \text{número de objetos de tamaño } X$$

La gráfica de  $f$  no se podría dibujar porque los valores de  $X$  incluyen  $27 - (-35) = 62$  órdenes de magnitud. Entonces lo que es más inteligente es definir

$$Y = \log_{10}(X) = \text{el orden de magnitud de } X$$

$$g(Y) = \text{número de objetos con orden de magnitud } Y$$

Jorge Ramirez,  
Escuela de Matemáticas,  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.  
Todos los derechos reservados.