Clase 2

Función lineales. Funciones definidas a tramos, valor absoluto, simetría, función par, impar, funciones crecientes, decreciente.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Algunas funciones básicas pero importantes:

- Función identidad
- Función constante.

Funciones lineales

Pregunta: Qué significa que "y es proporcional a x"?
Respuesta: Significa que $y = f(x)$, que a medida que x crece, y también lo hace; pero además que $f(2x) = 2 f(x)$, $f(3x) = 3 f(x)$.
Esto implica que $f(x) = c\,x$ para alguna constante $c > 0$, y la gráfica es una línea recta que pasa por el origen.
Ejemplo: El volumen de sudor por unidad de tiempo de una persona es proporcional al peso de la persona. Cómo es esa función? Cuáles son las variables? Cómo es la gráfica? Si sabemos que una persona de 70Kg suda 30ml de sudor por minuto, cuál es la fórmula?

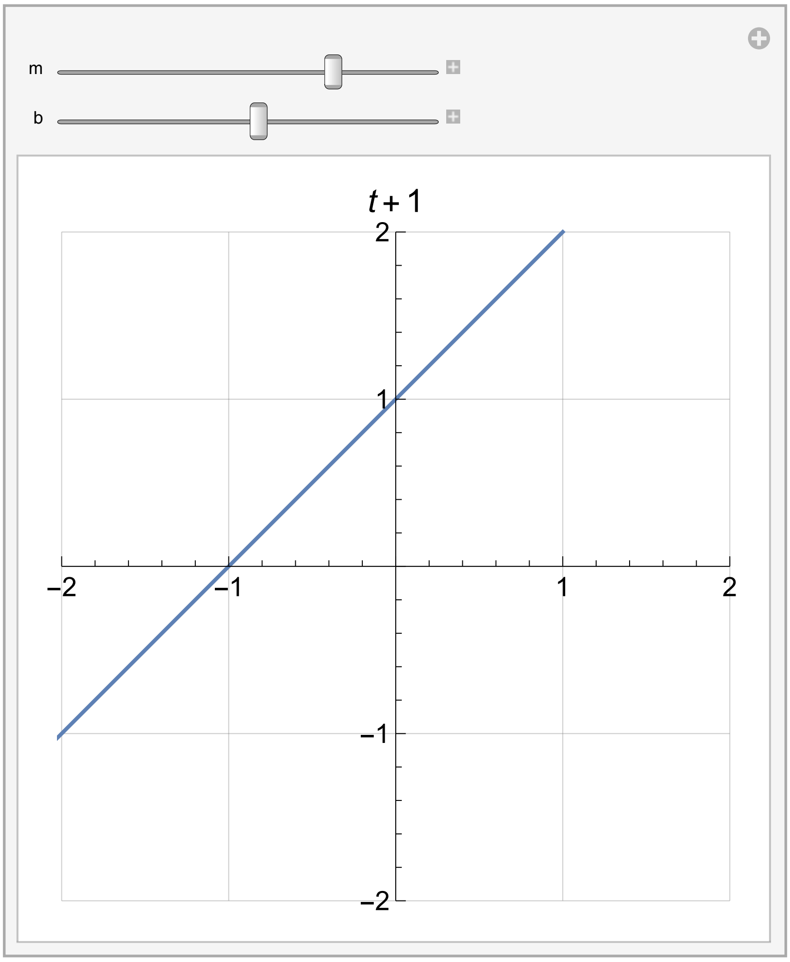
La proporcionalidad es un ejemplo de una **función lineal.** Estas funciones tienen las siguientes caracteristicas:

- $f(x) = m\,x + b$ para algunos números m y b.
- La gráfica de f es una línea recta.
- **La razón de cambio de *f* respecto a *x*** es siempre la misma: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ es igual para cualquier par de x_1, x_2.

Caracterización

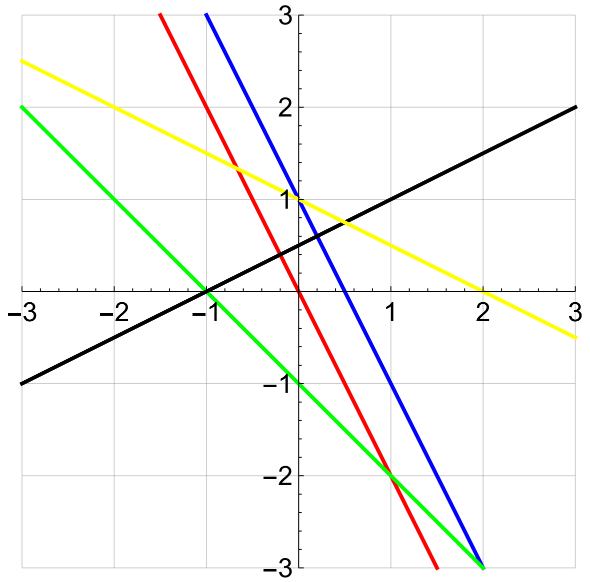
- $b = f(0)$ es el intercepto con el eje vertical.
- $m = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\text{incremento en } y}{\text{incremenento en } x}$ es la **pendiente = razón de cambio de *f* respecto a *x*.**

Gráficas



Habililidad importante: asociar rápidamente la gráfica de una función lineal con su fórmula

1. $-2x$
2. $-x-1$
3. $0.5x+0.5$
4. $1-2x$
5. $1-0.5x$



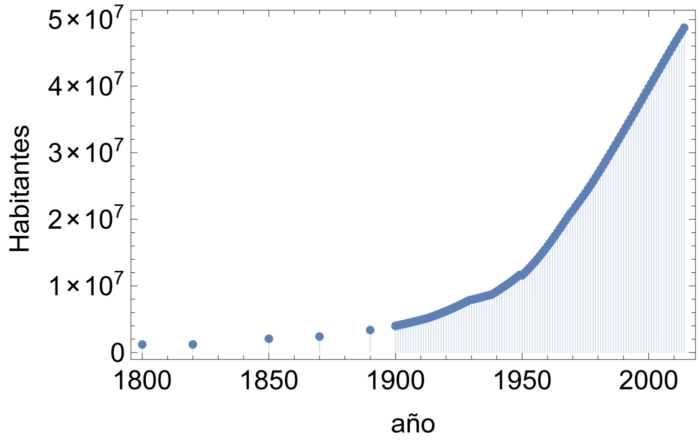
Ejemplos:

- distancia recorrida en metros es $y = 1 + 4t$, con t en segundos. Gráfica, interpretación.
- El precio de la gasolina extra son 10000 por galón.
- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 3) y tiene pendiente 2.
- Población colombiana en millones de habitantes como función del tiempo:

```
pob = CountryData["Colombia", {{"Population"}, All}];
pob = {DateList[#]⟦1⟧ & /@pob["Times"], QuantityMagnitude /@pob["Values"]}ᵀ;
tabla = TableForm[pobᵀ, TableHeadings → {{"t", "p(t)"}, None}];
tabla1970 = TableForm[pob⟦76 ;;⟧, TableHeadings → {None, {"t", "p(t)"}}];
grafToda = ListPlot[pob, Filling → Bottom,
    PlotStyle → PointSize[Medium], AxesOrigin → {1800, 0}, Frame → True,
    FrameLabel → {"año", "Habitantes"}, RotateLabel → True];
graf1970 = ListPlot[pob⟦76 ;;⟧, Filling → Bottom,
    PlotStyle → PointSize[Medium], AxesOrigin → {1970, 0}, Frame → True,
    FrameLabel → {"año", "Habitantes"}, RotateLabel → True];
```

Gráfica de los datos:

grafToda



Se observa un **comportamiento lineal desde 1970**:

graf1970

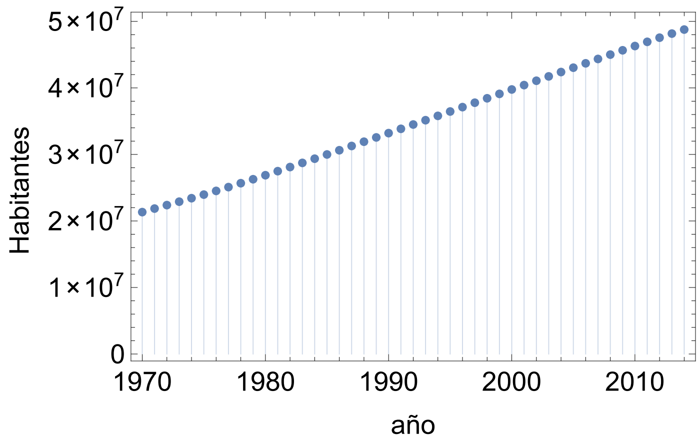


tabla1970

t	p(t)
1970	21 329 811
1971	21 861 689
1972	22 381 887
1973	22 898 136
1974	23 421 644
1975	23 960 605
1976	24 517 307
1977	25 089 511
1978	25 675 364
1979	26 271 401
1980	26 874 906
1981	27 485 678
1982	28 104 254
1983	28 729 367
1984	29 359 535
1985	29 993 539
1986	30 630 754
1987	31 270 841
1988	31 913 250
1989	32 557 521
1990	33 203 321
1991	33 849 971
1992	34 497 319
1993	35 146 220
1994	35 797 965
1995	36 453 337
1996	37 112 621
1997	37 775 054
1998	38 439 099
1999	39 102 653
2000	39 764 166
2001	40 422 597
2002	41 078 136
2003	41 731 914
2004	42 385 712
2005	43 040 558
2006	43 696 540
2007	44 352 327
2008	45 005 782
2009	45 654 044
2010	46 294 841
2011	46 927 125
2012	47 550 708
2013	48 165 221
2014	48 770 570

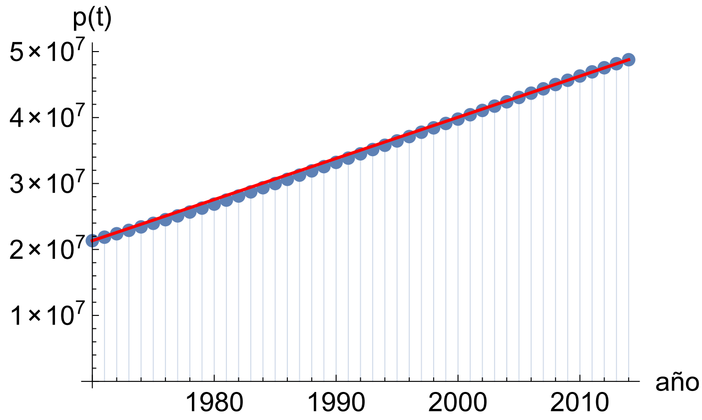
Hallar un modelo matemático que aproxime la población colombiana:

```
modelo[t_] := 21 329 811 + 623 654 (t - 1970);
```

$$\frac{48\,770\,570 - 21\,329\,811}{44.}$$

623 654.

```
Show[ListPlot[pob[[76 ;;]]],
 Plot[modelo[t], {t, 1970, 2014}, PlotStyle → Red],
 PlotRange → {Automatic, Automatic},
 AxesOrigin → {1970, 0}, AxesLabel → {"año", "p(t)"}]
```



Cuál será la población en el 2020 de acuerdo a nuestro modelo? Qué significado tiene la pendiente de la fórmula? Será este un buen modelo para toda la historia de Colombia?

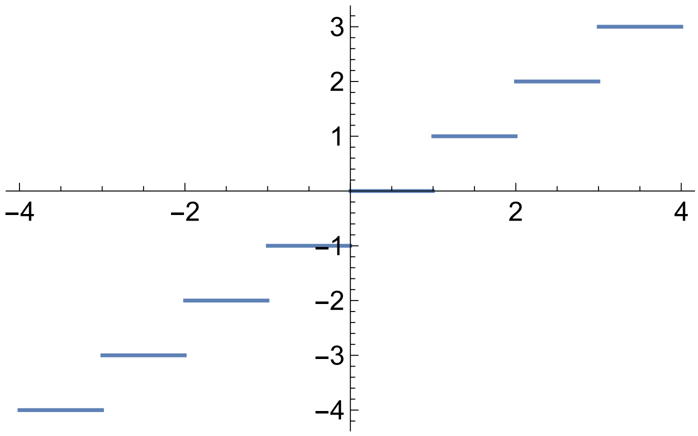
Funciones dadas por tramos (ejemplos)

- Valor absoluto
- Hacer la gráfica de:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<-1, \\ 0, & -1 \le x \le 1, \\ -2\,x, & 1<x \end{cases}$$

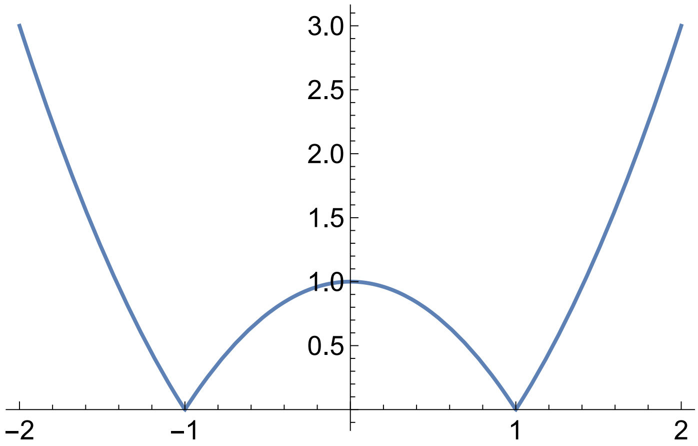
- Función redondeo por debajo:

```
Plot[{Floor[x]}, {x, -4, 4}]
```



- Función taxi. El precio de la carrera depende de la distancia recorrida por el taxi así: el ‘banderazo’ vale 2.600 pesos, por cada 78 metros se cobran 81 pesos y la carrera mínima es de 4.600 pesos.
- Descibir $\left| x^2-1 \right|$ como una función por tramos.

```
Plot[{Abs[x^2 - 1]}, {x, -2, 2}]
```



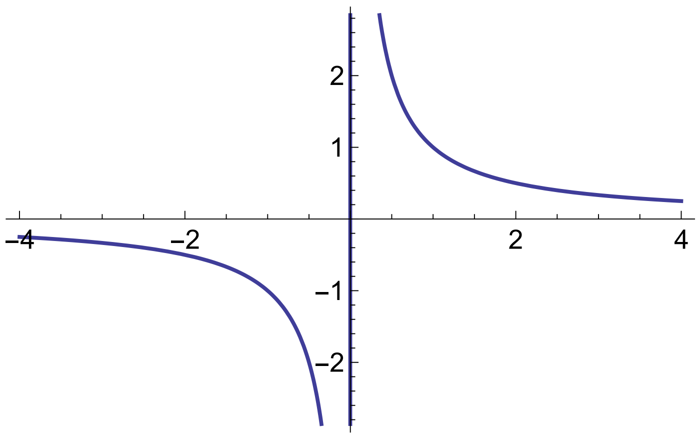
Algunas calificativos para funciones:

Según su comportamiento: creciente y decreciente.

- Decimos que la función f es **creciente** en el intervalo I si para todo $x < y$ en Dom(f) $\cap$ I se cumple que $f(x) \leq f(y)$.

Ejemplos

- La función constante es creciente o decreciente.
- Cuál es la función creciente más sencilla?
- Una funcíon lineal $f(x) = m\,x + b$ es creciente si y sólo si $m \geq 0$.
- Mostrar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$. Es esa función decreciente? en cuáles intervalos?



Según su simetría: par e impar.

- Decimos que f es una **función par** si se cumple que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in$ Dom(f).
- Decimos que f es una **función impar** si se cumple que $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in$ Dom(f).

Ejemplos

- Cuál es la función par más sencilla?

- Cuál es la función impar más sencilla?
- Existe una función que sea par e impar a la vez?
- Determinar si la siguiente función es par o impar:

$$F(x) = \begin{cases} x(1-x), & x < 0 \\ x(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$$

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.