Clase 18

Derivadas de polinomios y de funciones exponenciales. Las reglas del producto y del cociente. Derivación de funciones trigonométricas y exponenciales. Pequeña regla de la cadena.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Propiedades de la derivada

Sean f, g funciones diferenciables. Entonces:

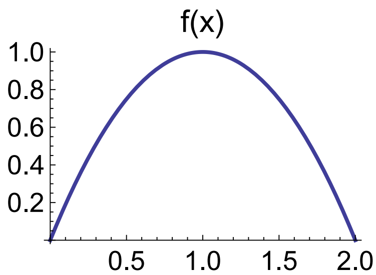
Sumas y multiplicación por escalares

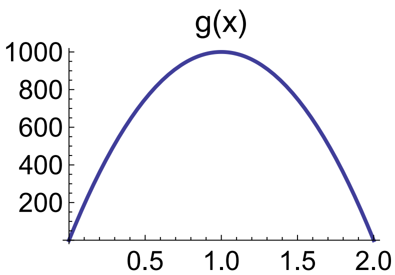
- $(f+g)' = f' + g'$

Ejemplo. $f(x)$ es el costo de x sopas, $g(x)$ es el costo de x secos. Entonces $(f+g)(x)$ es el costo de x almuerzos. El precio unitario de los almuerzos es $(f+g)'(x)$ y es igual a la suma de los precios unitarios $f'(x) + g'(x)$.

- $(c f)' = c f'$

Ejemplo. Sea $f(x)$ la distancia recorrida en Km, como función del tiempo x en horas. La distancia recorrida en metros es $g(x) = 1000 f(x)$. $g'(x)$ es la velocidad en m/h, f' es la velocidad en km/h. Se cumple que $g'(x) = 1000 f'(x)$.



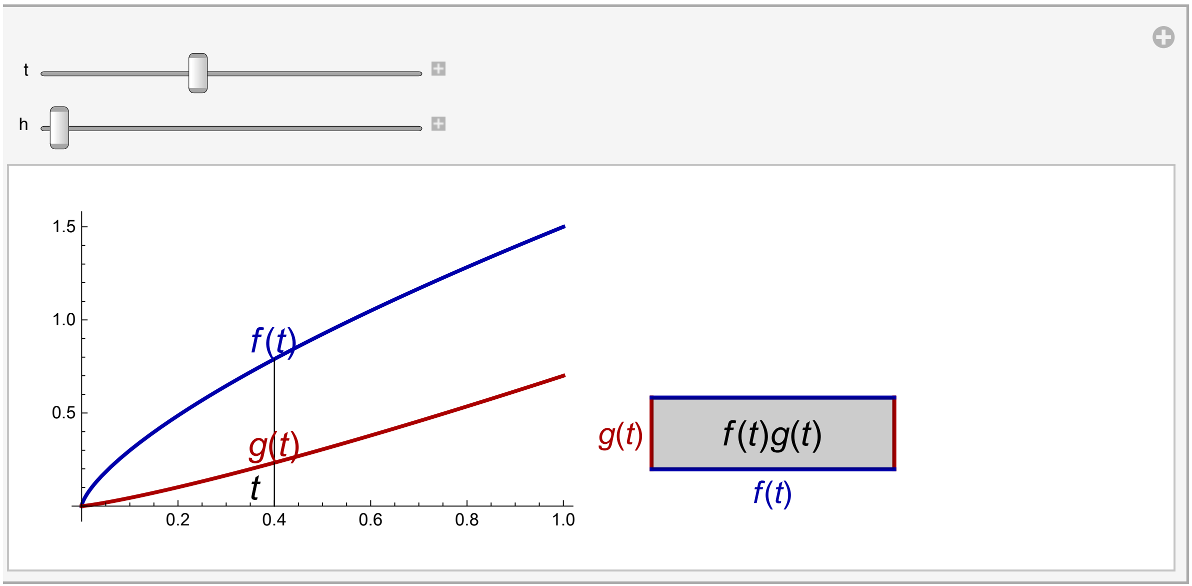


Regla del producto

- $(f g)' = f g' + g f'$

Demostración

$$\begin{aligned}\lim \frac{1}{\Delta t}\left[(f g)(t) - (f g)(t + \Delta t)\right] &= \lim\left\{f(t)\,\frac{\Delta g}{\Delta t} + g(t)\,\frac{\Delta f}{\Delta t} + \frac{\Delta f\,\Delta g}{\Delta t}\right\} \\ &= \lim\left\{f(t)\,\frac{\Delta g}{\Delta t} + g(t)\,\frac{\Delta f}{\Delta t} + \frac{\Delta f\,\Delta g}{\Delta t\,\Delta t}\,\Delta t\right\} \\ &= f(t)\,g'(t) + g(t)\,f'(t)\end{aligned}$$



Ejemplo

Suponga que los ingresos de cierto negocio (en millones de pesos) aumentan con el tiempo $I(t) = I_0 + a\,t$. Pero la tasa impositiva sobre los ingresos está disminuyendo con el tiempo $r(t) = r_0 - b\,t$. El pago total en impuestos es $P(t) = I(t)\,r(t)$. Estará aumentando o disminuyendo? Usar por ejemplo $I_0 = 10$, $a = 0.5\,\$/\text{año}$, $r_0 = 0.15$, $b = 0.05\,\text{año}^{-1}$.

Regla del cociente

- Si $g(x) \neq 0$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g^2}(g\,f' - f\,g')$

Demostración

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)\,g(a) - g(x)\,f(a)}{(x-a)\,g(x)\,g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)\,g(a) - f(a)\,g(a) + f(a)\,g(a) - g(x)\,f(a)}{(x-a)\,g(x)\,g(a)}$$

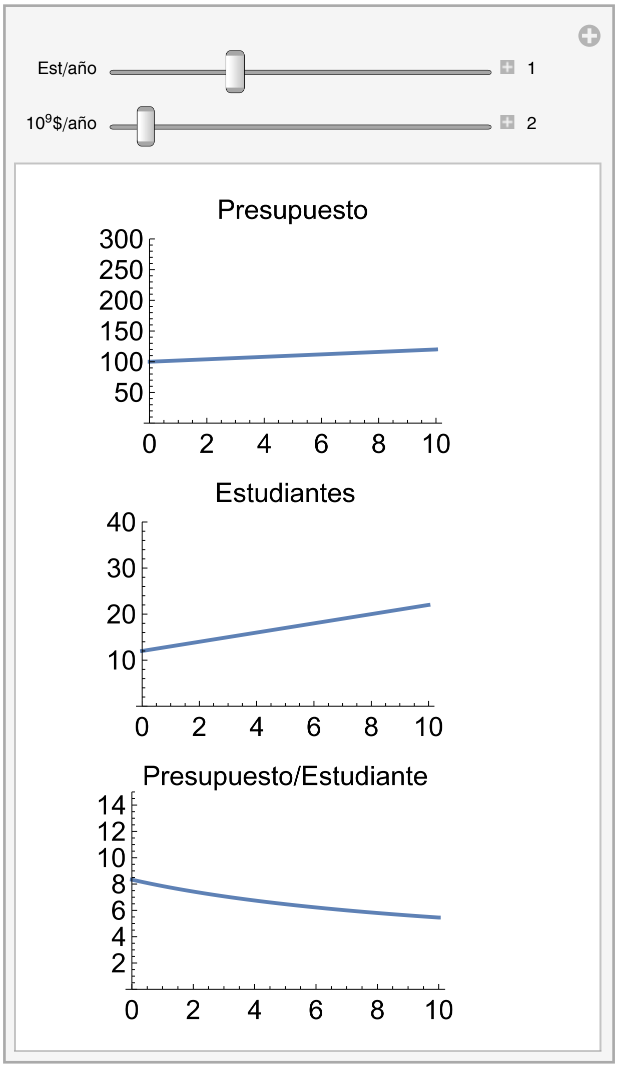
$$= \lim_{x\to a} \frac{g(a)\,(f(x) - f(a)) - f(a)\,(g(x) - g(a))}{(x-a)\,g(x)\,g(a)} = g(a)\,f'(a) - f(a)\,g'(a)$$

Ejemplo

Suponga $E(t)$ son los estudiantes de la universidad: $E(t) = E_0 + a\,t$. Y que el presupuesto en miles de millones son $P(t) = P_0 + b\,t$. Entonces el presupuesto per cápita es

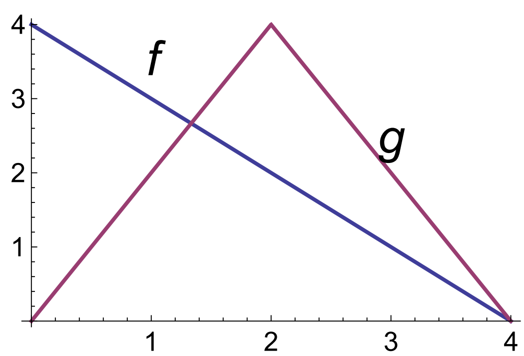
$$f(t) = \frac{P(t)}{E(t)},\quad f'(t) = \frac{E(t)\,P'(t) - P(t)\,E'(t)}{E(t)^2} = \frac{b\,E(t) - a\,P(t)}{E(t)}$$

Cuál debe ser las tasa de reclutamiento para que el presupuesto per cápita no decrezca?



Ejemplo

Evaluar la regla del cociente y el producto en diferentes puntos para las siguientes funciones.

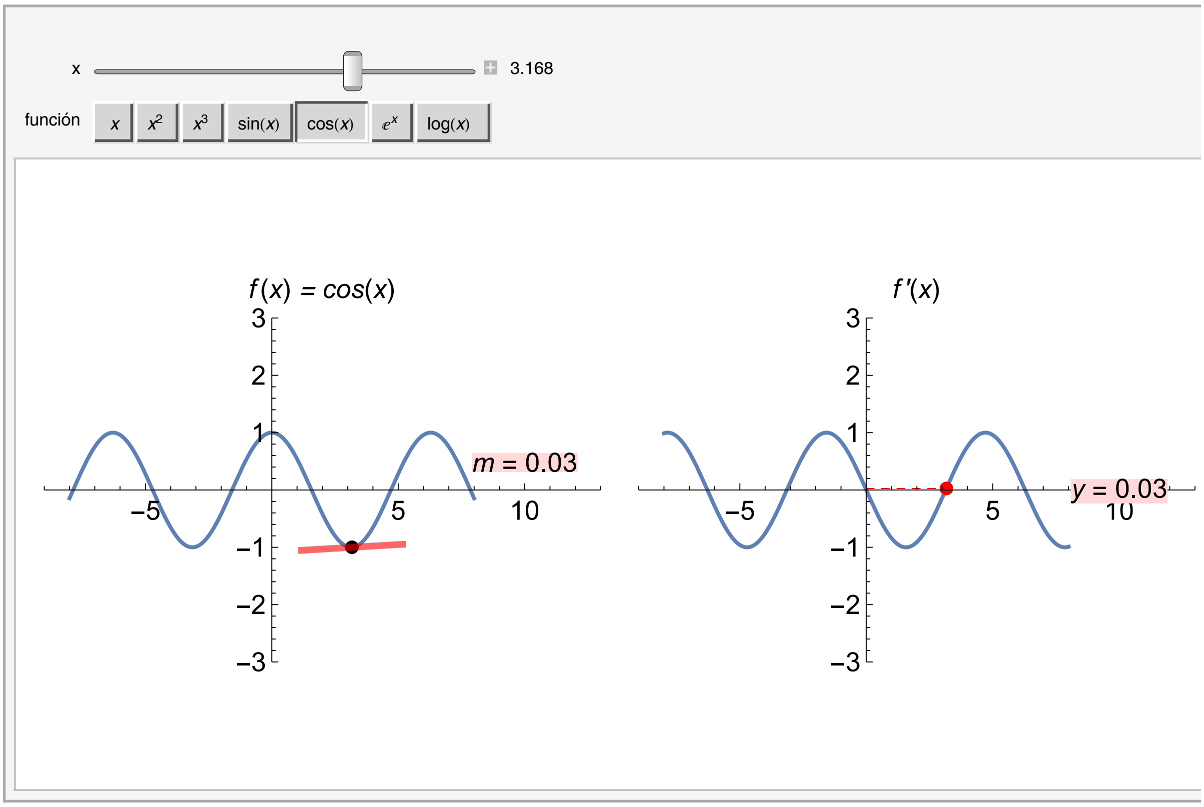


Derivadas a partir de fórmulas

- $f(x) = c$
- $f(x) = m\,x + b$

- $f(x) = x^n$
- $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$
- $f(x) = \text{sen}(x)$
  - Mostrar que $f'(0) = 0$
  - Mostrar que $f'(x) = -\cos(x)$ usando la fórmula y la gráfica
- $f(x) = \cos x$. $\cos(x) = \text{sen}(x + \pi/2)$, entonces $\cos'(x) = -\cos(x + \pi/2) = \text{sen}(x)$.
- $f(x) = \tan(x)$
- $f(x) = e^x$.

Mostrar la variación de f' junto con la de la recta tangente para diferentes ejemplos de funciones:

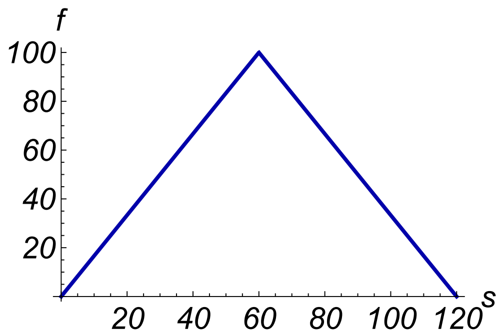


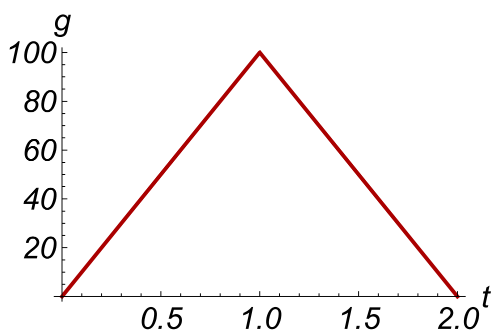
Ejemplos:

- Recta tangente a $\frac{2x-5}{x+1}$ en $x = 0$.
- Dónde es $\frac{1}{x^2+1}$ cóncava hacía arriba?
- Halle $\frac{d^{50}}{dx^{50}} \text{sen}(x)$

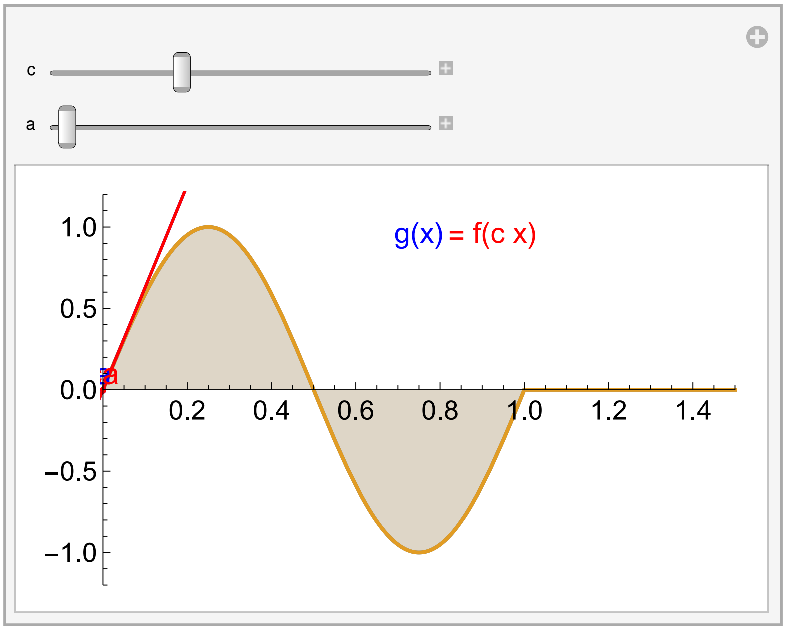
Pequeña regla de la cadena

Ejemplo. Sea $f(x)$ la distancia recorrida en m, como función del tiempo s en segundos. La distancia recorrida en metros como función del tiempo t en segundos es $g(t) = f(60\, t)$. $g'(t)$ es la velocidad en m/min, f' es la velocidad en m/s. Cuál es la relación?





En general, dada $g(x) = f(c\,x)$ para una constante c, entonces $g'(x) = c\,f'(c\,x)$.



Ejemplo importante:

$$f(x) = a^x,\ f'(x) = \frac{d}{dx} e^{x \ln(a)} = \ln(a) \frac{d e^x}{dx} (\ln(a)\,x) = \ln(a)\, e^{\ln(a)\,x} = \ln(a) \times a^x$$

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.