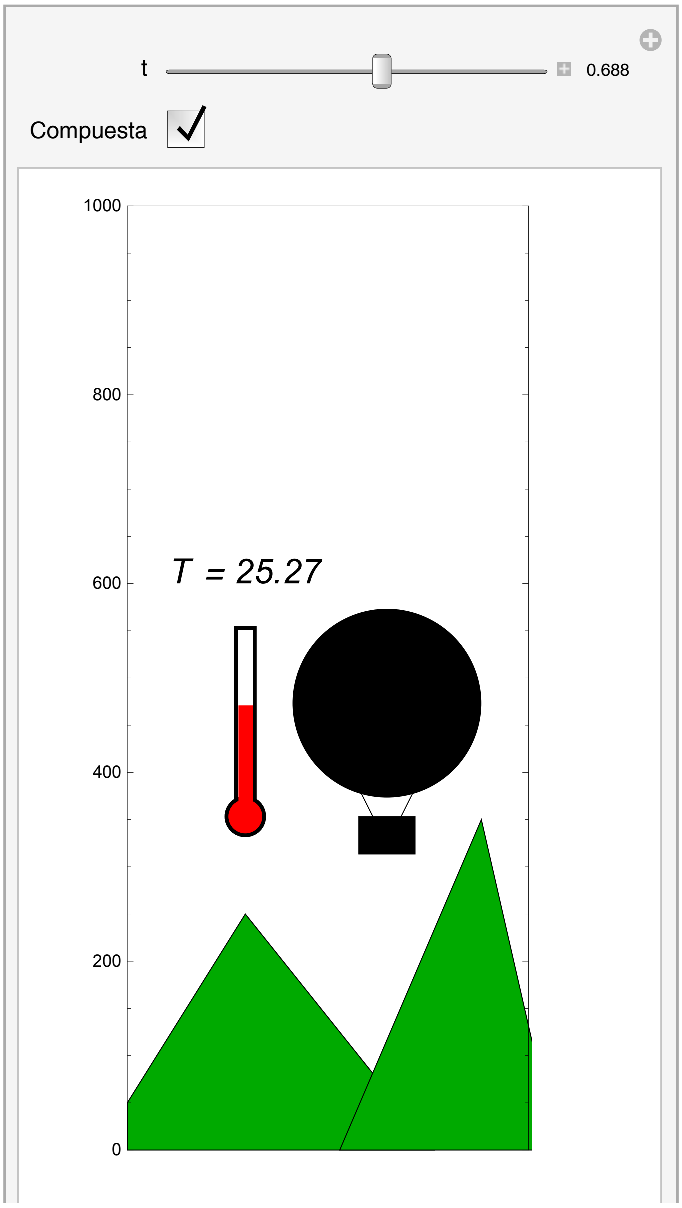
Clase 20

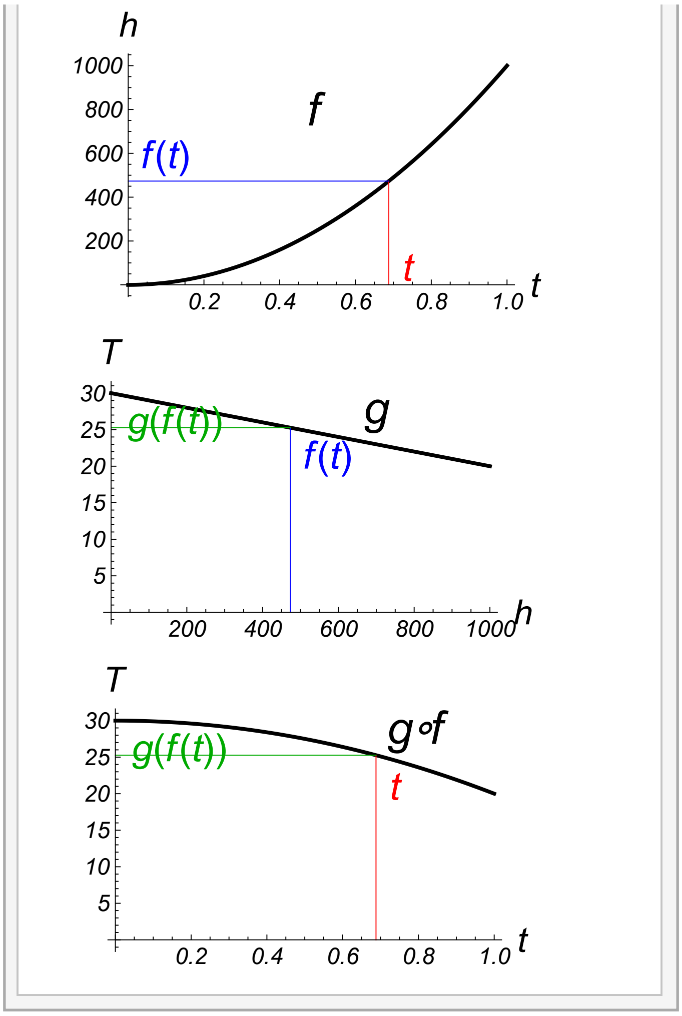
La regla de la cadena. Derivación de funciones inversas.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

La regla de la cadena

Suponga que $h = f(t)$ es la altura de un globo, y $T = g(h)$ es la temperatura como función de la altura. $g \circ f(t)$ es la temperatura en el globo. Cómo se relaciona $(g \circ f)'(t)$ con f' y g'?





Si para $t = 0.5$, el globo se encuentra a una altura de $f(0.5) = 200\ m$ y va subiendo a una velocidad de $f'(0.5) = 2000\ m/h$, y que a esa altura, la temperatura decrece con la altura a una tasa de $g'(f(0.5)) = \left(\frac{-1}{100}\right) {}^\circ C/m$ entonces, la temperatura en el globo debe estar disminuyendo a una tasa de:

$$\left(\frac{-1}{100}\ \frac{{}^\circ C}{m}\right)\left(2000\ \frac{m}{h}\right) = -20\ \frac{{}^\circ C}{h}$$

$$g'(f(0.5))\, f'(0.5) = (g\circ f)'(0.5)$$

En general, si t, s son dos instantes de tiempo:

$$\frac{g(f(t))-g(f(s))}{t-s} = \frac{g(f(t))-g(f(s))}{f(t)-f(s)}\ \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

$$= \frac{\text{cambio en la temperatura en el globo}}{\text{cambio en la altura}}\ \frac{\text{cambio en la altura}}{\text{cambio en el tiempo}}$$

$$= (\text{cambio promedio de } g \text{ entre } f(t) \text{ y } f(s)) \cdot (\text{cambio promedio de } f \text{ entre } t \text{ y } s)$$

Tomando límites:

$$(g\circ f)'(t) = \lim_{s\to t} \frac{g(f(t))-g(f(s))}{t-s} = \lim_{s\to t} \frac{g(f(t))-g(f(s))}{f(t)-f(s)}\ \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

$$= \lim_{h\to f(t)} \frac{g(f(t))-g(h)}{f(t)-h}\ \lim_{t\to s} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = g'(f(t))\, f'(t)$$

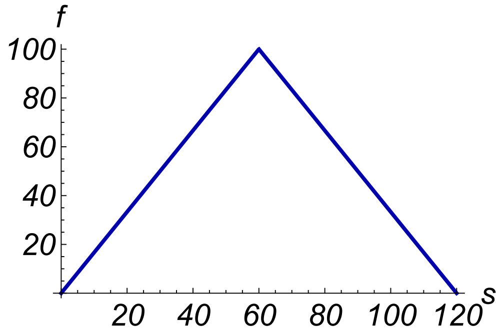
Teorema

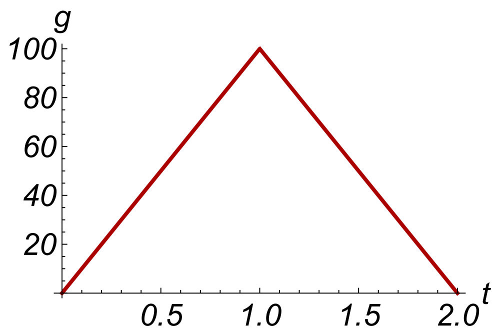
Si f es diferenciable en x, y g es diferenciable en $g(x)$, entonces $(f \circ g)$ es diferenciable en x, y $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

Ejemplos

Ejemplo. Si $f(t) = 1000\, t^2$, y $g(h) = 30 - \frac{h}{100}$. Calcular e interpretar $(g \circ f)'(t)$.

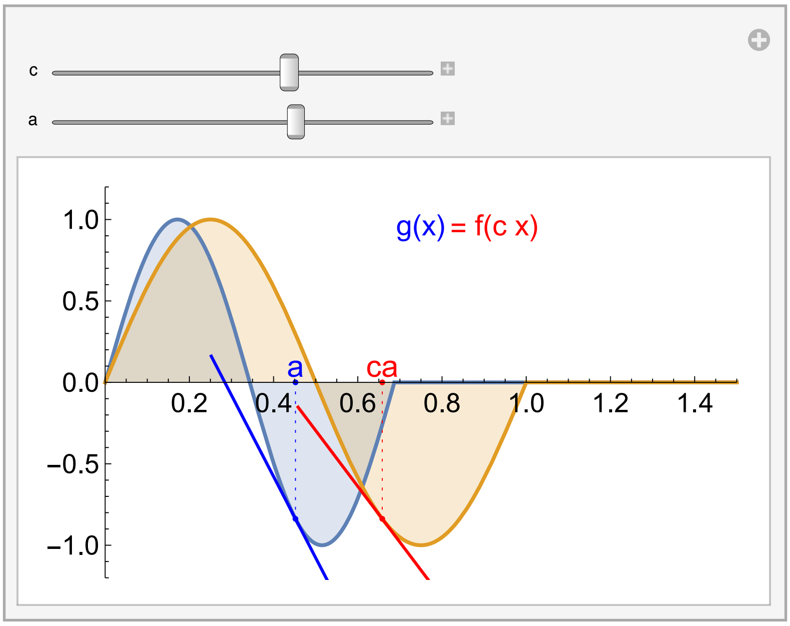
Ejemplo. Si $c \in \mathbb{R}$, y $g(x) = f(c\,x)$, entonces $g'(x) = c\, f'(c\,x)$.
Sea $f(x)$ la distancia recorrida en m, como función del tiempo s en segundos. La distancia recorrida en metros como función del tiempo t en segundos es $g(t) = f(60\,t)$. $g'(t)$ es la velocidad en m/min, f' es la velocidad en m/s. Cuál es la relación?





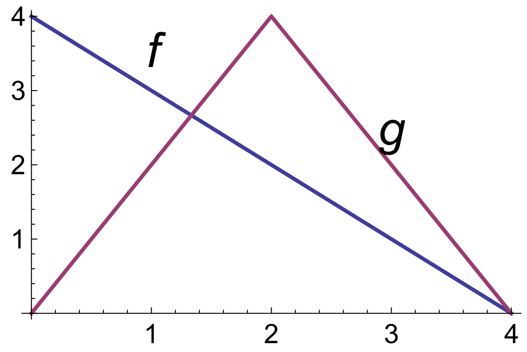
Ejemplo importante:

$$f(x) = a^x, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} e^{x \ln(a)} = \ln(a) \frac{de^x}{dx} (\ln(a)\, x) = \ln(a)\, e^{\ln(a)\, x} = \ln(a) \times a^x$$



Ejemplo. $\frac{1}{x^2+x^4}$, $e^{1+\sqrt{\sin(x)}}$, $\sin(3\,x) - \tan(x^2)$.

Ejemplo. A partir de gráficas.



Derivada de las funciones inversas

Suponga que f es diferenciable e invertible en x, entonces:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$
$$f'\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}\right)'(y) = 1$$
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Ejemplo

Si $f(t)$ es la posición del globo, $f'(t)$ es la velocidad del globo en el tiempo t. $f^{-1}(h)$ tiene como dominio las alturas [0, 1000] metros. Por tanto $\left(f^{-1}\right)(h)$ es el tiempo al cual se alcanza la altura h. Si $f(0.5) = 200\,m$, $f^{-1}(200\,m) = 0.5\,\text{min}$ y $f'(0.5) = 2000\,m/h$ entonces lo que podemos decir es:

$$\left(f^{-1}\right)'(200\,m) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(200\,m)\right)} = \frac{1}{f'(0.5\,\text{min})} = \frac{1}{2000}\,\frac{h}{m}$$

quiere decir que cuando me encuentro a los 200 m, por cada metro adicional que quiera subir, tengo que esperar $\frac{1}{200}$ minutos.

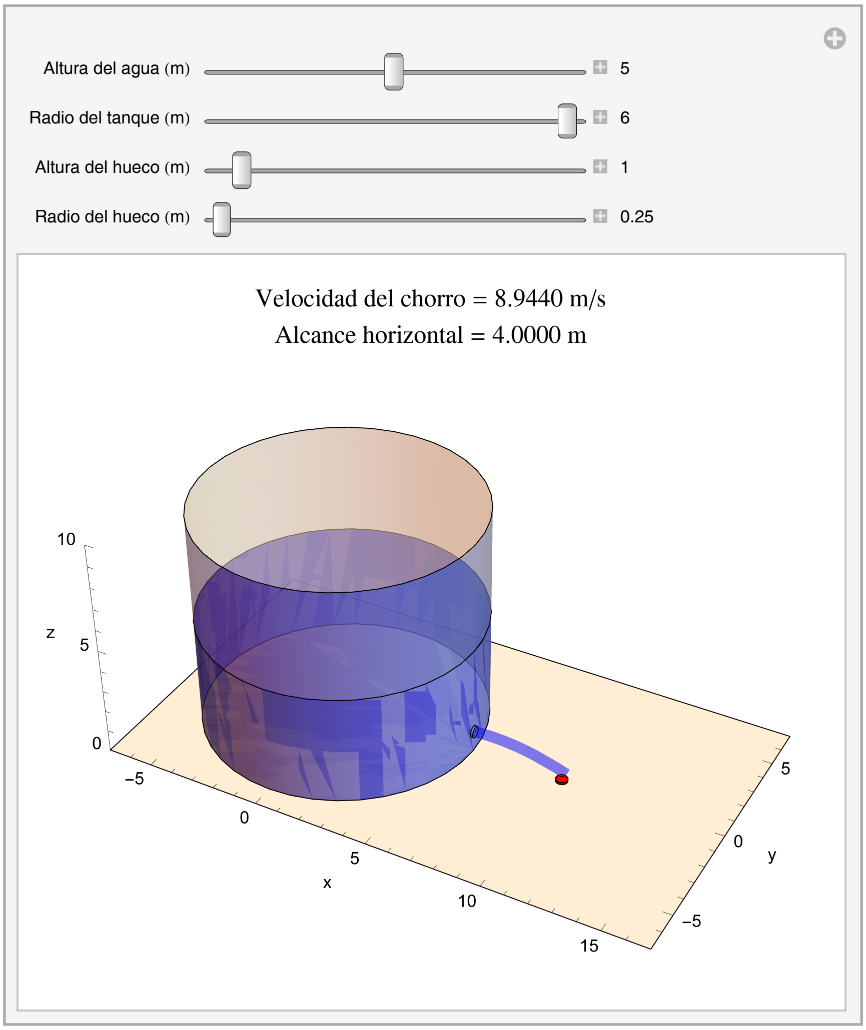
Usando la fórmula:

$$f^{-1}(h) = \sqrt{\frac{h}{1000}}\,,\ \left(f^{-1}\right)'(h) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{1000}\right)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{h}{m}$$

Repetir con $T = g(h)$ en $h = 200\,m$: $g'(h) = \frac{1}{100}\,\frac{^\circ C}{m}$

Ejemplo

Un tanque ancho, tiene un hueco a una altura h. La velocidad a la que sale agua por el hueco es, según la ley de Torricelli, $v(H) = \sqrt{2\,g\,H}$ donde H es la altura del nivel del agua por encima del hueco. El alcance total del chorro se puede calcular y es $A(v) = v\sqrt{2\,\frac{h}{g}}$. Calcule $A(v(H))$, su derivada, y la derivada de su inversa.



Notas:

- La derivada de f y la de f' tienen el mismo signo.
- Si f tiene un punto x donde $f'(x) = 0$, entonces f^{-1} no será diferenciable en $f(x)$.

Para funciones dadas por fórmulas

Logaritmos

$$f(x) = a^x, \;\; f'(x) = \ln(a)\, a^x, \;\; f^{-1}(y) = \log_a y,$$

$$\frac{d}{dx} \log_a(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\ln(a)\, a^{\log_a(y)}} = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{y}$$

$$\frac{d}{dy} \ln(y) = \frac{1}{y}$$

Ejemplo

Vimos que si la población está dada por $P(t) = P_0 (F/2)^{\frac{t}{E}}$ entonces, el tiempo para alcanzar un nuevo millón de individuos es

$$t^*(F) = \ln\left(1 + \frac{10^6}{P_0}\right) E \, \frac{1}{\ln(F/2)}$$

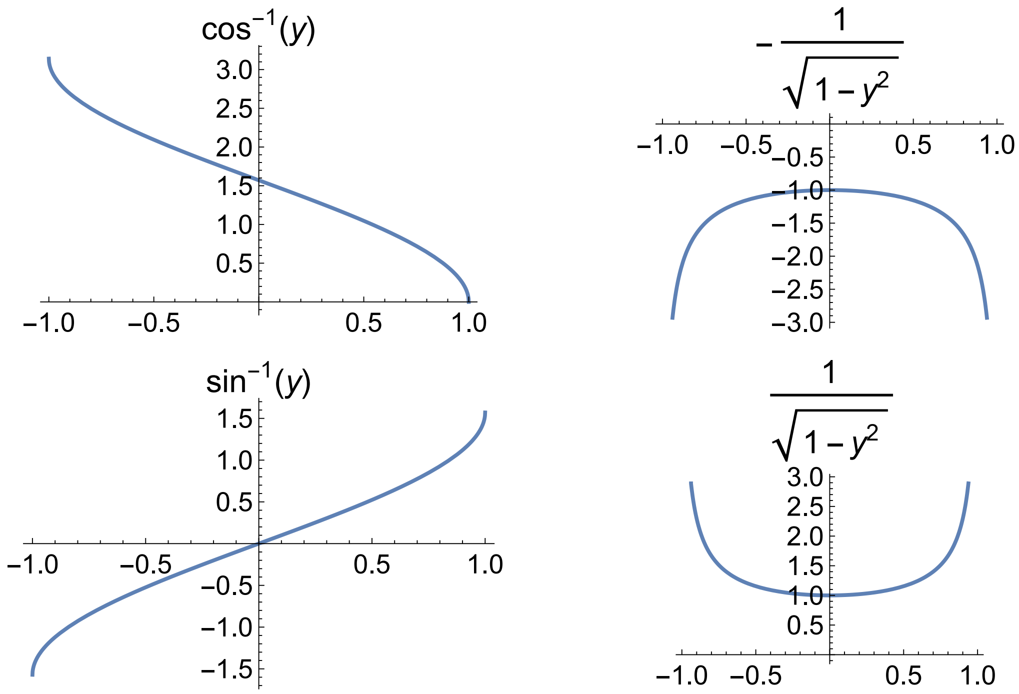
Calcule $d t^* / d F$ e interprete.

$$\mathbf{P0} = 44 \times 10^{6};$$
$$\mathbf{Ev} = 73;$$
$$\mathbf{ts[F\_] := Log}\left[1 + \frac{10^{6}}{\mathbf{P0}}\right] \mathbf{Ev} \frac{1}{\mathbf{Log[F / 2]}}$$

Funciones trigonométricas inversas.

$$f(x) = \operatorname{sen}(x),\ \ f'(x) = \cos(x),\ \ f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen}(y),$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

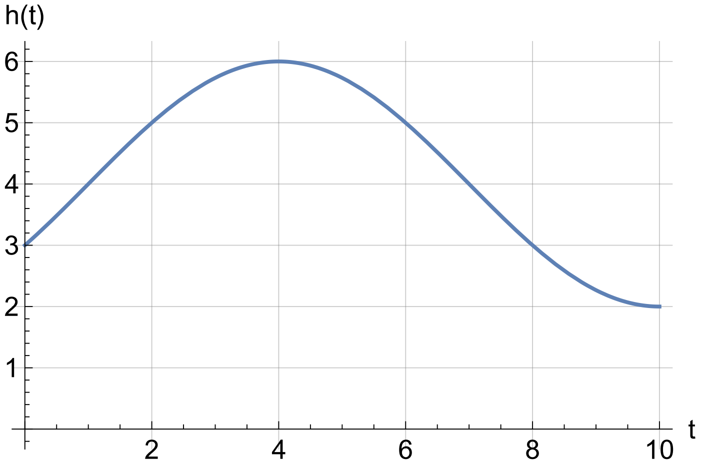
$$f(x) = \cos(x),\ \ f'(x) = -\operatorname{sen}(x),\ \ f^{-1}(y) = \arccos(y),$$
$$\frac{d}{dx}\arccos(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(y))} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$



Ejemplo

Calcule $\left(h^{-1}\right)'(5)$ cuando la marea sube, y cuando baja.

```
Plot[2 Cos[(2 π)/12 (t - 4)] + 4, {t, 0, 10}, PlotStyle → Thick, AxesOrigin → {0, 0},
 GridLines → Automatic, LabelStyle → 14, AxesLabel → {"t", "h(t)"}]
```



En general:

$$h_B{}^{-1}(y) = \frac{12}{2\pi}\cos^{-1}\left(\frac{y-4}{2}\right) \text{ si la marea baja}$$
$$h_S{}^{-1}(y) = 4 - \frac{12}{2\pi}\cos^{-1}\left(\frac{y-4}{2}\right) \text{ si la marea sube}$$

Calcule $\left(h_a{}^{-1}\right)'(y)$ e interprete.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.