Clase 6

Funciones exponenciales: gráficas, leyes de los exponentes, modelación con funciones exponenciales, el número e.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Motivación

Para cada ejemplo: definir las variables, hacer una tabla, llegar fórmula y mostrar la gráfica.

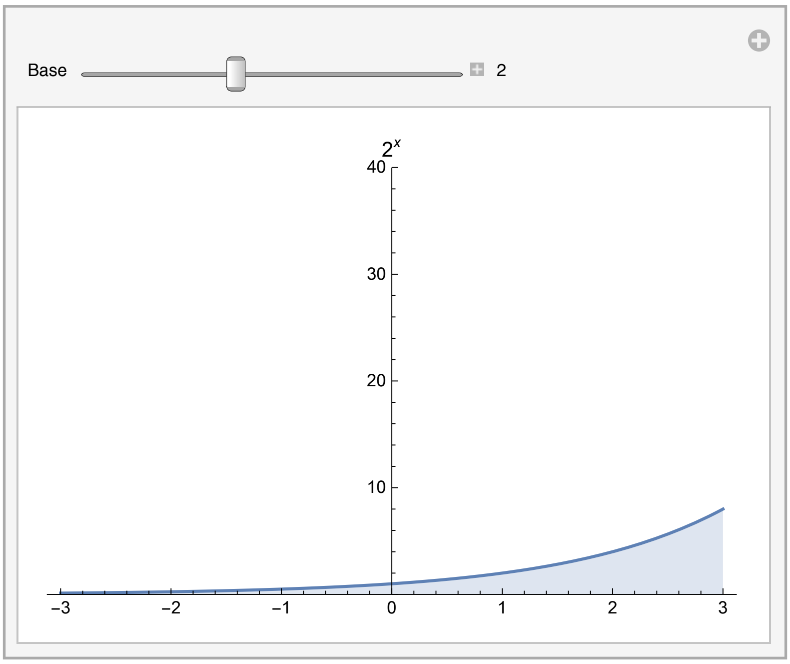
- Una población de células cancérigneas, inicialmente con 4 células, se triplica cada mes.
- Se hizo un préstamo de 10 millones a una tasa de interés del 5% anual.
- La cantidad del un elemento radioactivo se reduce a la mitad cada 30 años.

Funciones exponenciales

Una función de la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0$ fijo, se llama una función exponencial de base a.

Gráficas de a^x

Si $a > 1$ la función es creciente, si $a < 1$ la función es decreciente, si $a = 1$ la función es constante.
Recuerde $a^0 = 1$ para todo $a > 0$.



La relación con el logaritmo

Recuerde que:

$$a^x = b \text{ si y solo si } \log_a(b) = x$$
$$a^{\log_a(b)} = b$$

Ejemplos

- $\log_2 8 =$
- $\log_{10} 0.001 =$

Para entender el crecimiento exponencial

El crecimiento de 2^n y la leyenda sobre el origen del ajedrez.

El juego del ajedrez fue inventado en la India. Cuando el rey hindú SHERAM lo conoció, quedó maravillado de lo ingenioso que era y de la variedad de posiciones que en él son posibles. Al enterarse de que el inventor era uno de sus súbditos, el rey lo mandó llamar con objeto de recompensarle personalmente por su acertado invento.

El inventor, llamado SETA, se presentó ante el soberano. Era un sabio vestido con modestia, que vivía gracias a los medios que le proporcionaban sus discípulos.

—Seta, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado

El sabio contestó con una inclinación.—Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado —continuó diciendo el rey—. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás.
—Soberano —dijo Seta—, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero del ajedrez.
—¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey.
—Sí, soberano. Por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta. 16; por la sexta, 32... —
—Basta —interrumpió irritado el rey—. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo: por cada casilla doble cantidad que por la precedente. Pero has de saber que tu petición es indigna de mi generosidad. Al pedirme tan mísera recompensa. menosprecias, irreverente, mi benevolencia.

Los matemáticos de la corte calculan el número de granos que le corresponden. El rey frunció el ceño. No estaba acostumbrado a que tardaran tanto en cumplir sus órdenes. Por la noche, al retirarse a descansar, el rey preguntó de nuevo cuánto tiempo hacia que Seta había abandonado el palacio con su saco de trigo.

Número de arroces en cada casilla

```
Manipulate[Row[{"2"^(n-1), "=" AccountingForm[2^(n-1), DigitBlock → 3]}],
 {{n, 2, "Casilla"}, 1, 64, 1, Appearance → "Labeled"}]
```

Casilla 54

2^{53} = 9,007,199,254,740,992

Número total de arroces para Seta

```
Sum[2^(n-1), {n, 1, 64}]
```

18 446 744 073 709 551 615

Para comparar

Producción mundial de arroz anual = 678 millones de toneladas. Cada arroz pesa 25×10^{-3} gramos.

Número de granos de arroz que se producen anualmente en todo el mundo:

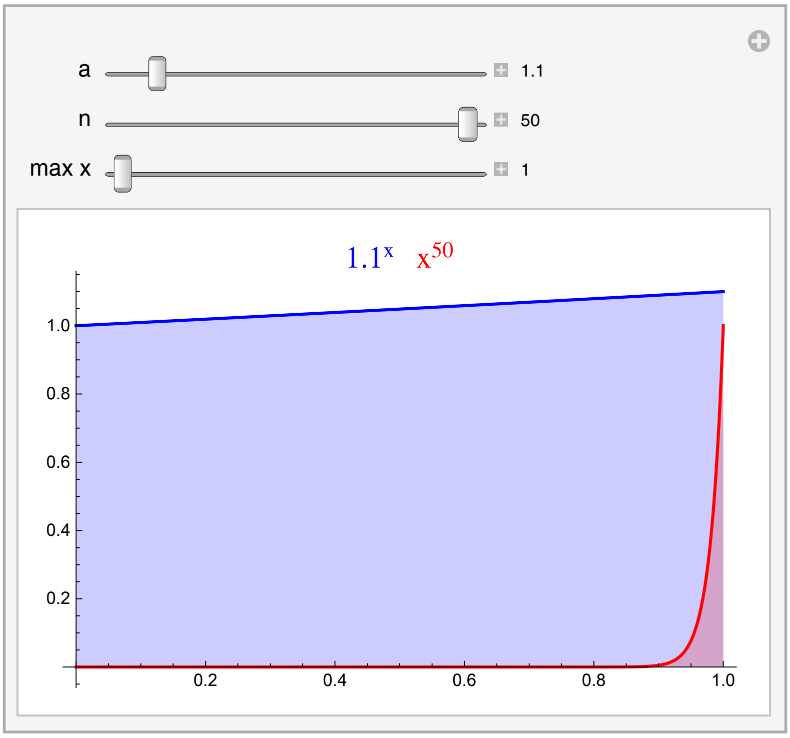
$$\frac{678.\times 10^{6}\times 10^{6}}{26\times 10^{-3}}$$

2.60769×10^{16}

Pregunta: en cuál casilla se supera por primera vez la producción anual?

Cualquier función exponencial le gana a cualquier función potencia

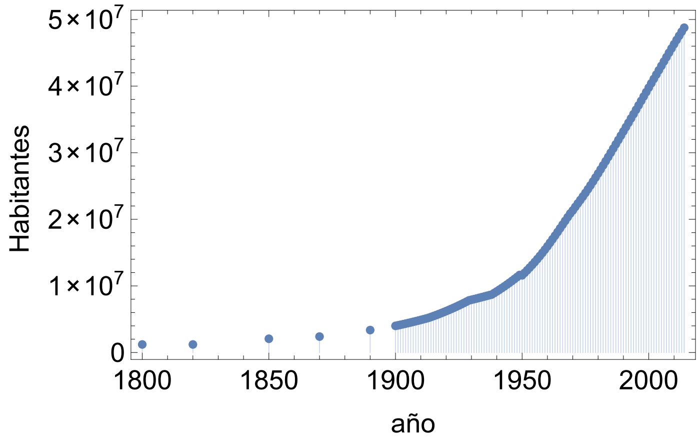
Comparación entre crecimiento **exponencial** y crecimiento **potencial**. No importa qué tan grande sea n o que tan cercano sea a a uno, si $a > 1$, entonces a^x crece mucho mas rápido que x^n para valores suficientemente grandes de x.



Un modelo exponencial para la población colombiana

Esta es la evolución de la población colombiana en las últimas dos décadas. Queremos predecir la población a futuro. Aunque parece tener un comportamiento lineal, sabemos que las funciones exponenciales son los modelos más usados para modelar poblaciones en biología y demografía.

```
grafToda
```



El modelo

El modelo es una gran simplificación. Usemos los siguientes datos para Colombia:

- E = esperanza promedio de vida en años = 72.81 ≈ 73 años
- F = tasa de fertilidad total (número promedio de hijos por mujer) = 2.46 (en 1970, esta tasa era 6!!)
- P_0 = población actual = 4.63×10^7 colombianos.

Nuestra modelo es el siguiente: **cada *E* años, cada pareja en la población muere y es remplazada por *F* personas.**

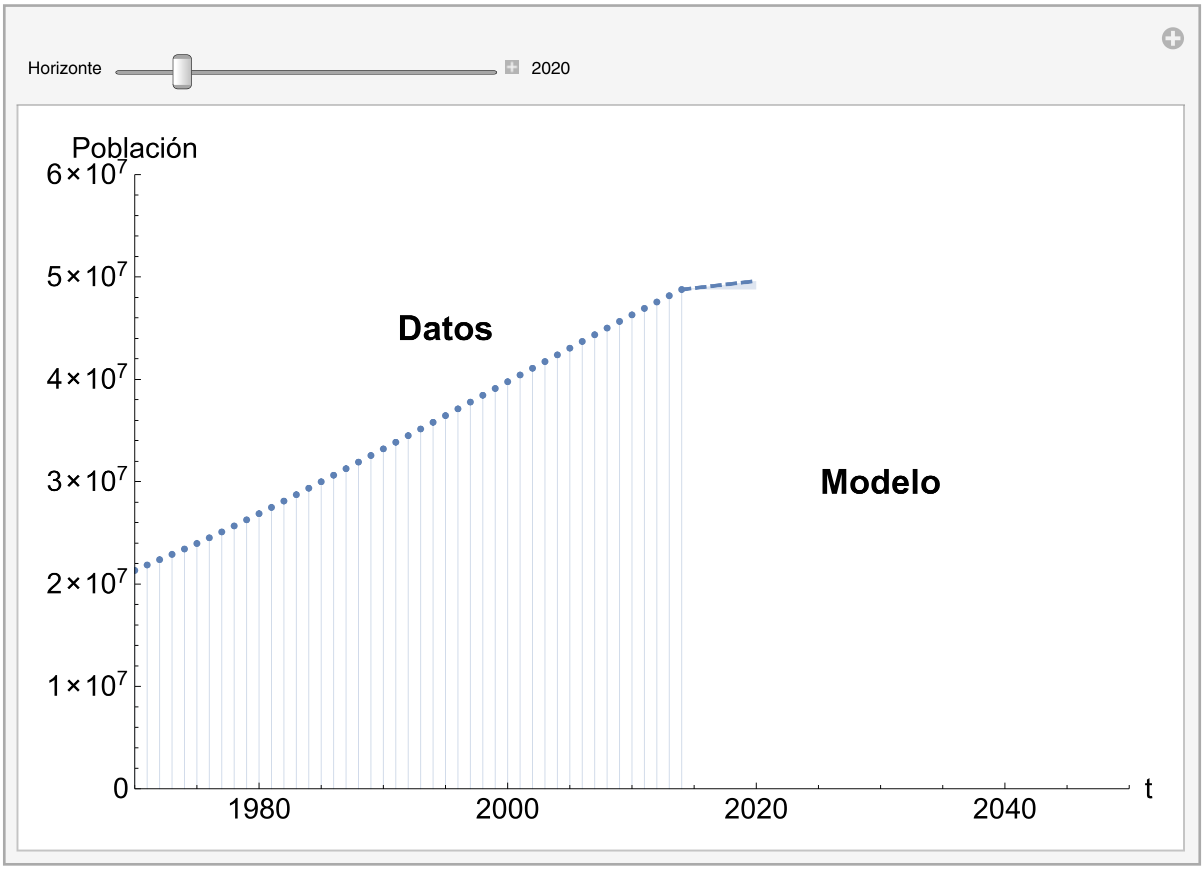
Tabla:

año	2014	2014 + E	2014 + 2 E	2014 + 3 E	⋯
Población	P_0	$\frac{P_0}{2}F$	$P_0\left(\frac{F}{2}\right)^2$	$P_0\left(\frac{F}{2}\right)^3$	⋯

Entonces obtenemos un modelo exponencial:

$$Ev = 73;$$
$$F = 2.46;$$
$$P0 = 48\,770\,570;$$
$$P[t\_] := P0\left(\frac{F}{2}\right)^{\frac{(t-2014)}{Ev}};$$

Predicciones con el modelo:



Obviamente nuestro modelo es **malo**: subestima la población. **Por qué?**
Además parece lineal! Para empezar a ver el crecimiento exponencial haga el horizonte igual a 2200 años.

Una pregunta interesante:

Cuánto tiempo pasará para que la población se incremente en 10^6 personas?

$$\frac{\text{Ev}}{\text{Log}\left[\frac{\text{F}}{2}\right]}\ \text{Log}\left[1+\frac{10^6}{\text{P0}}\right]$$

```
7.15731
```

Un caso dramático: la India

```
EvIndia = QuantityMagnitude@CountryData["India", "LifeExpectancy"]
```

```
66.414
```

```
FIndia = QuantityMagnitude@CountryData["India", "TotalFertilityRate"]
```

```
2.72
```

```
P0India = QuantityMagnitude@CountryData["India", "Population"]
```

```
1 291 780 156
```

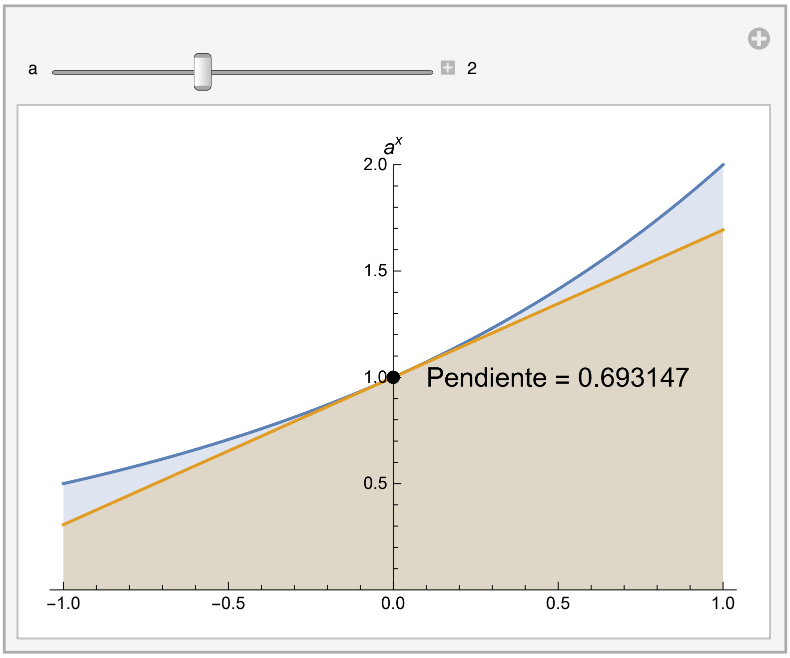
Años para que la población de la india aumente en un millón de habitantes:

$$\frac{\text{EvIndia}}{\text{Log}\left[\frac{\text{FIndia}}{2}\right]} \text{Log}\left[1 + \frac{10^6}{\text{P0India}}\right]$$

```
0.16714
```

La base e.

Todas las funciones exponenciales $f(x) = a^x$ satisfacen $f(0) = 1$. Existe un valor de la base a para el cual el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (0, 1) es igual a 1. Esa base el número irracional $e \approx 2.7182$.



Cambio de base

Dada una función exponencial de la forma: $f(x) = a^x$, siempre podemos escribirla en términos de otra base:

$$f(x) = a^x = \left(b^{\log_b a}\right)^x = b^{x \log_b a}$$

En particular, **todas** las funciones exponenciales se pueden escribir de la forma:

$$f(x) = e^{k x} \text{ para algún } k \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo

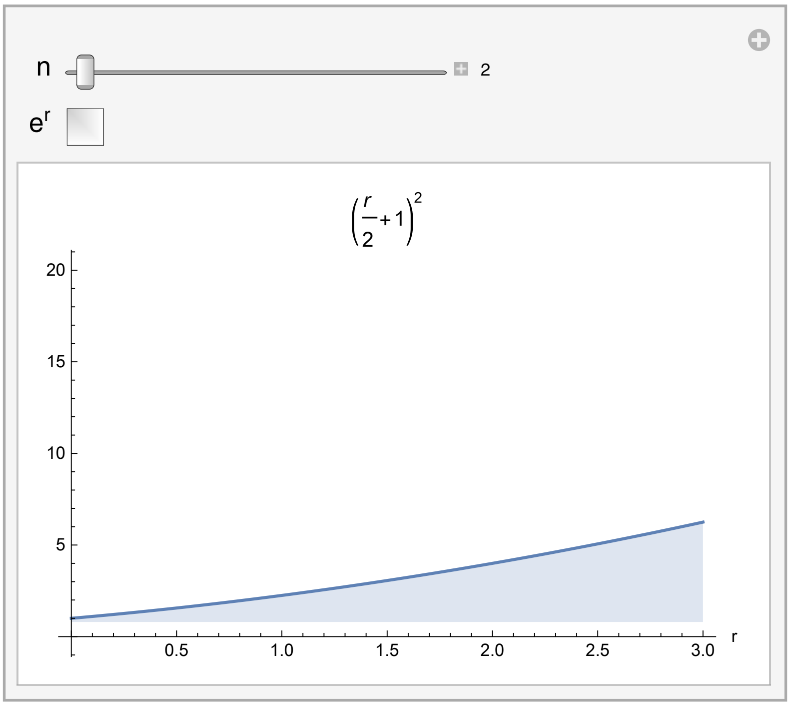
Una planta está invadiendo un lago cuadrado 100 m por 100 m. Un día se observa que hay 2 cm^2 infestados por la planta. Tres días después, el área colonizada era de 6 cm^2. Se sabe además, que como no hay depredadores ni restricciones de nutrientes, el área colonizada va a crecer exponencialmente. Cuándo se llena el lago? El día antes de llenarse, qué tan lleno estaba el lago?

La base e como un límite.

La función $f(r) = e^r$ históricamente fue definida como un límite en términos de un problema de inversiones y tasas de interés.
Suponga que se tiene en el banco una cantidad inicial de 1 peso, a una tasa de interés r anual.

Si se aplica la tasa **una vez,** al final del año tendremos $(1 + r \times 1) = 1 + r$ pesos.
Si se aplica una tasa de $\frac{r}{2}$ dos veces al año, tendremos $\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$, etcétera. Si se aplica la tasa de interés $\frac{r}{n}$ un total de n veces en el año, el total de dinero al final del año será $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$.
La siguiente demostración muestra como:

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \approx e^r \text{ para } n \text{ muy grande}$$



El número *e* es irracional. Estas son sus 1000 primeras cifras decimales:

```
N[e, 1000]
```

```
2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535\
 47594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595\
 63073813232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408914993488\
 41675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027\
 61838606261331384583000752044933826560297606737113200709328709127443747047230\
 69697720931014169283681902551510865746377211125238978442505695369677078544996\
 99679468644549059879316368892300987931277361782154249992295763514822082698951\
 93668033182528869398496465105820939239829488793320362509443117301238197068416\
 14039701983767932068328237646480429531180232878250981945581530175671736133206\
 98112509961818815930416903515988885193458072738667385894228792284998920868058\
 25749279610484198444363463244968487560233624827041978623209002160990235304369\
 94184914631409343173814364054625315209618369088870701676839642437814059271456\
 35490613031072085103837505101157477041718986106873969655212671546889570350354
```

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.