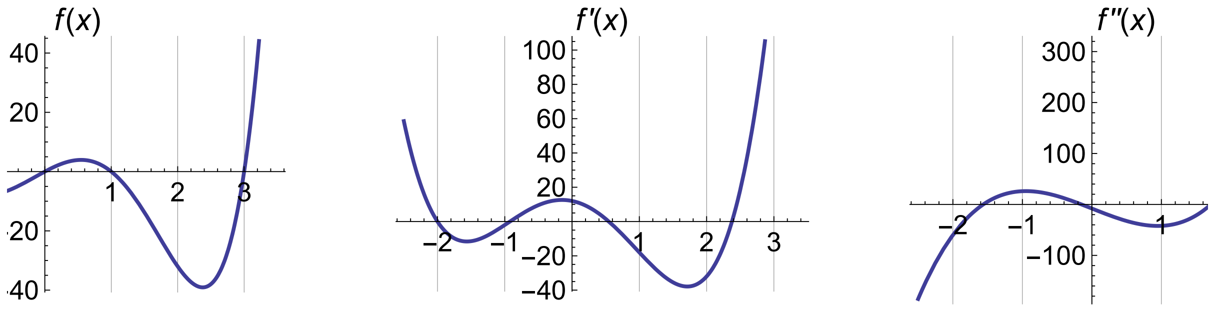
Clase 25

Derivadas y las formas de las curvas: valores extremos y relativos. Pruebas de las 1a y 2a derivada. Teoremas del valor medio y de Fermat.

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Extremos locales y globales

Información básica de f' y f''



Definiciones

Extremos locales

Sea $c \in \text{Dom}(f)$. Decimos que f tiene un máximo local en c, si existe un intervalo (α, β) con $c \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in (\alpha, \beta) \cap \text{Dom}(f)$.

Extremos globales

Sea I un intervalo contenido en $\text{Dom}(f)$ y $c \in I$. Decimos que el máximo global de f en el intervalo I está en c, si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.

Punto de inflexión

Decimos que f tiene un punto de inflexión en $x = c$ si la concavidad de la gráfica cambia en $x = c$.

Dónde buscar los extremos locales?

Teorema de Fermat

Si f tiene un extremo local en $x = c$ y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

$$(p \wedge q) \Longrightarrow r,\ \neg (p \wedge q) \bigvee r,\ \neg p \vee \neg q \vee r,\ \ \neg p \bigvee (\neg q \vee r),\ p \Longrightarrow (\neg q \vee r)$$

Es decir: si f tiene un extremo local en c, entonces $f'(c)$ no existe ó $f'(c) = 0$.
Por tanto: los únicos puntos dónde una función puede tener extremos locales son,

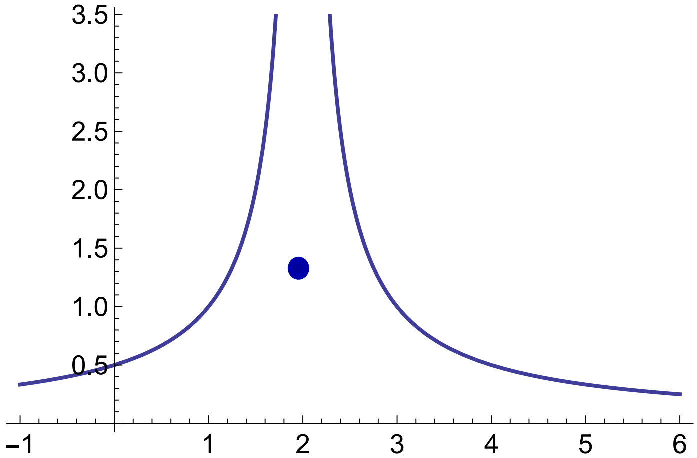
- Puntos críticos: números donde f' es cero o no existe
- Extremos del dominio de la función.

Cómo saber si un extremo local es max o min?

Prueba de la primera derivada

Si c es un punto crítico de f, donde f sea continua, y f' "cambia de positiva a a negativa en c", entonces f tiene un máximo en $x = c$. Es decir: si $f'(x) \leq 0$ para un intervalo de la forma $(c - \epsilon, c)$, y $f'(x) \geq 0$ para un intervalo de la forma $(c, c + \epsilon)$.

No todo punto donde la derivada cambie de signo es un extremo local. Acá, f' va de positiva a negativa pero es $x = 2$ es un mínimo local. La prueba no aplica porque f no es continua allí.



Prueba de la segunda derivada

Si $f'(c) = 0$ y $f''(c)$ existe, entonces:

- si $f''(c) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en $x = c$,
- si $f''(c) < 0$ entonces f tiene un máximo local en $x = c$

Ejemplos:

Hallar puntos críticos, max y mins

```
f1[x_] := 2^x/(x^2 + 1);
```

```
N@Solve[f1'[x] == 0, x]
```

{{x → 0.402806}, {x → 2.48258}}

```
2 Log[2] - 2.
```

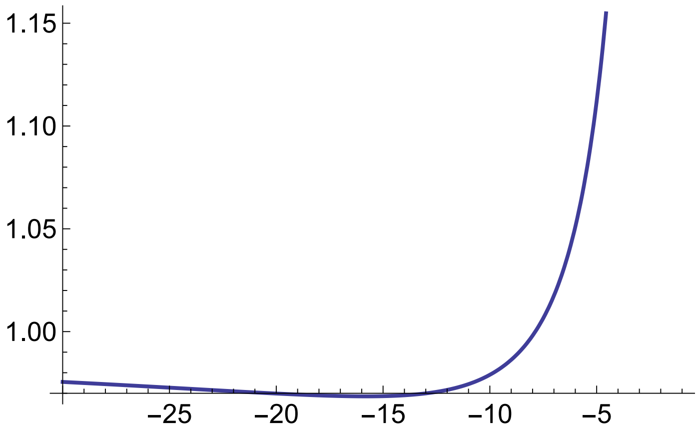
-0.613706

Hallar puntos críticos, max y mins

En esta función, sus max y mins no son aparentes desde la gráfica, y es necesario hacer el análisis.

$$f2[x\_] := 1 + \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3};$$

```
Plot[f2[x], {x, -30, -1}, AxesOrigin → Automatic]
```



Primera derivada:

Puntos críticos

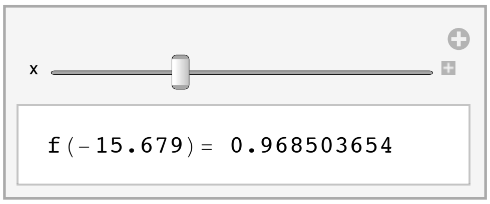
```
pcrit = N@Solve[f2'[x] == 0, x]
```

{{x → -15.8102}, {x → -0.18975}}

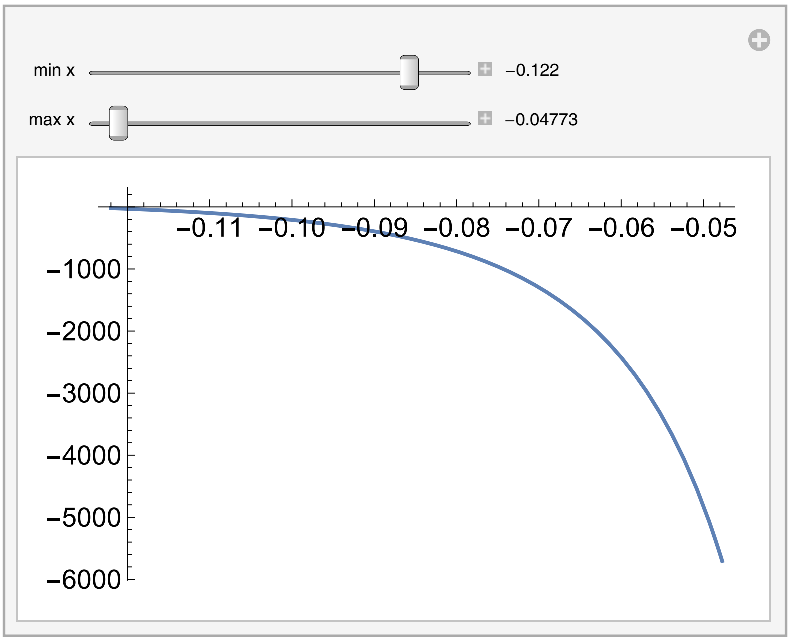
Prueba de la 2a derivada

x critico	f''(x)
-15.8102	0.00025
-0.18975	-12 049.4

Observe que el mínimo en $x = -15.8102$ es casi imperceptible

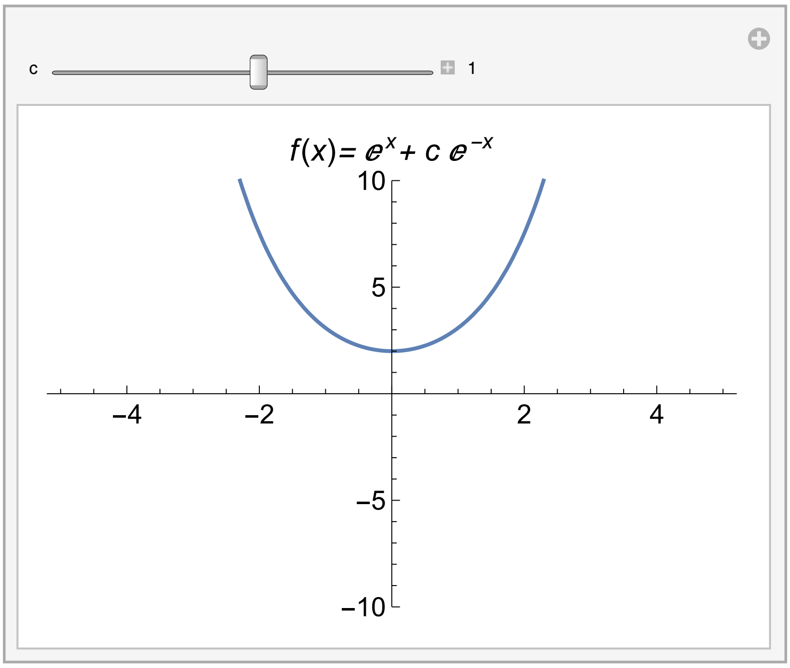


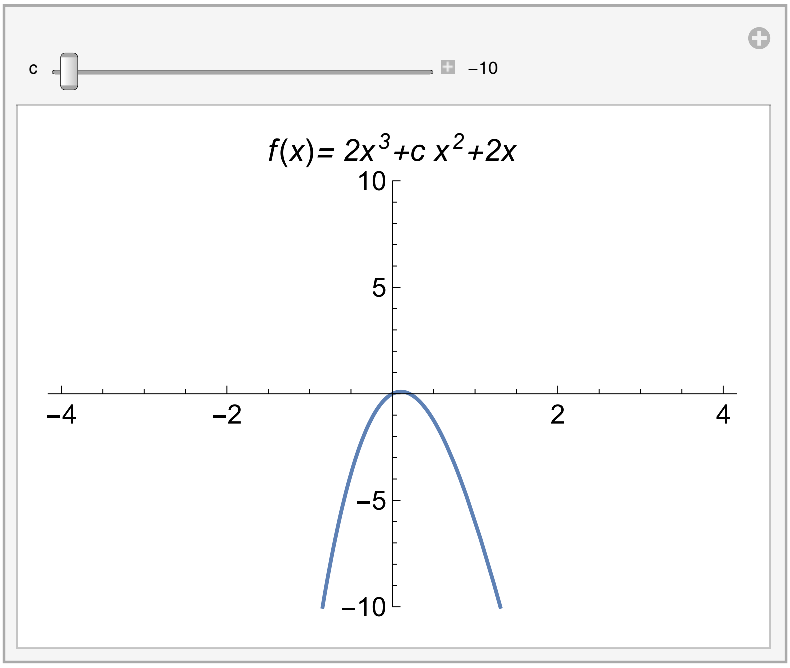
Y que el máximo en $x = -0.18975$ es invisible por los tamaños de la función cerca de el (es necesario hacer minx = –0.3, max = –0.15 para poder observarlo)

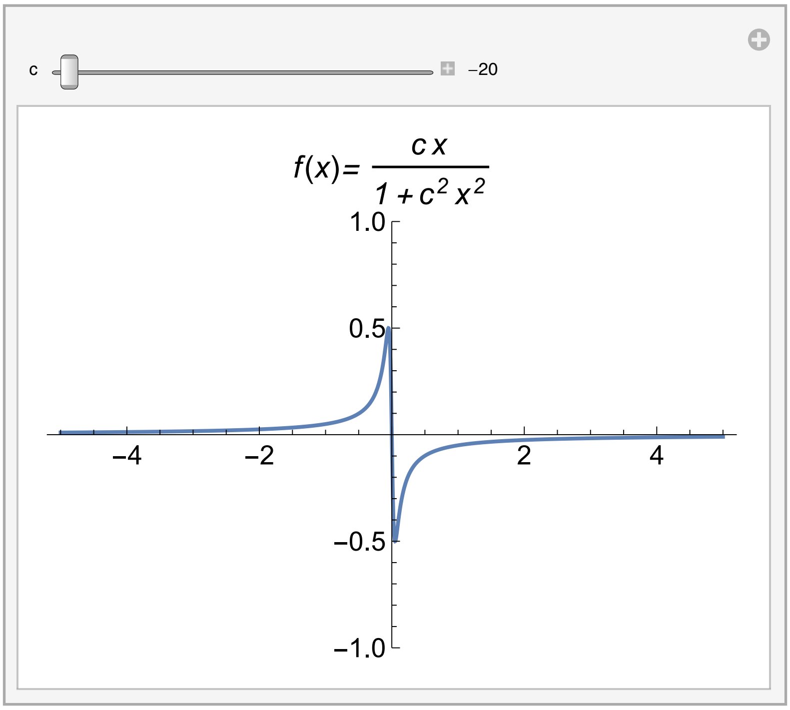


Familias de funciones

Dadas funciones con parámetros, nos interesa ahora concer cómo dependen los máximos y mínimos del valor del parámetro.



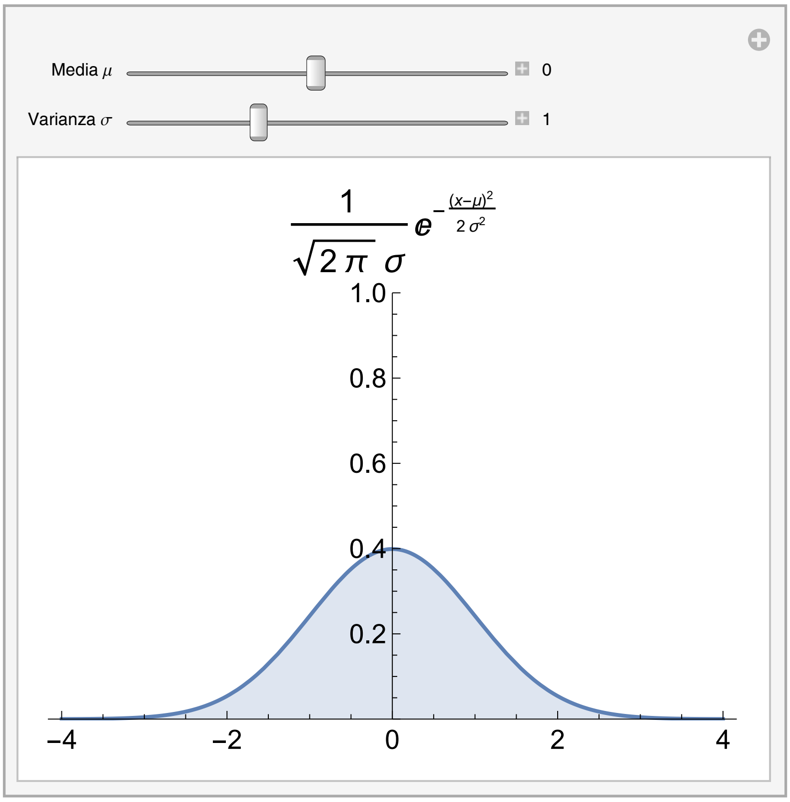




La distribución normal

La idea con este ejemplo es mostrar cómo se relaciona la varianza σ con los puntos de inflexión de la densidad de un distribución normal.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Análisis de deflexión de vigas

Para una viga en con ambos soportes fijos (support =4), longitud *L*, únicamente cargada con una carga distribuida *w*, y módulo de Young *E*, la deformación *y* en metros como función de la posición *x* está dada por:

$$y[x\_] := \frac{-W}{24\,EI}x^4 + \frac{W\,L}{12\,EI}x^3 - \frac{W\,L^2}{24\,EI}x^2$$

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.