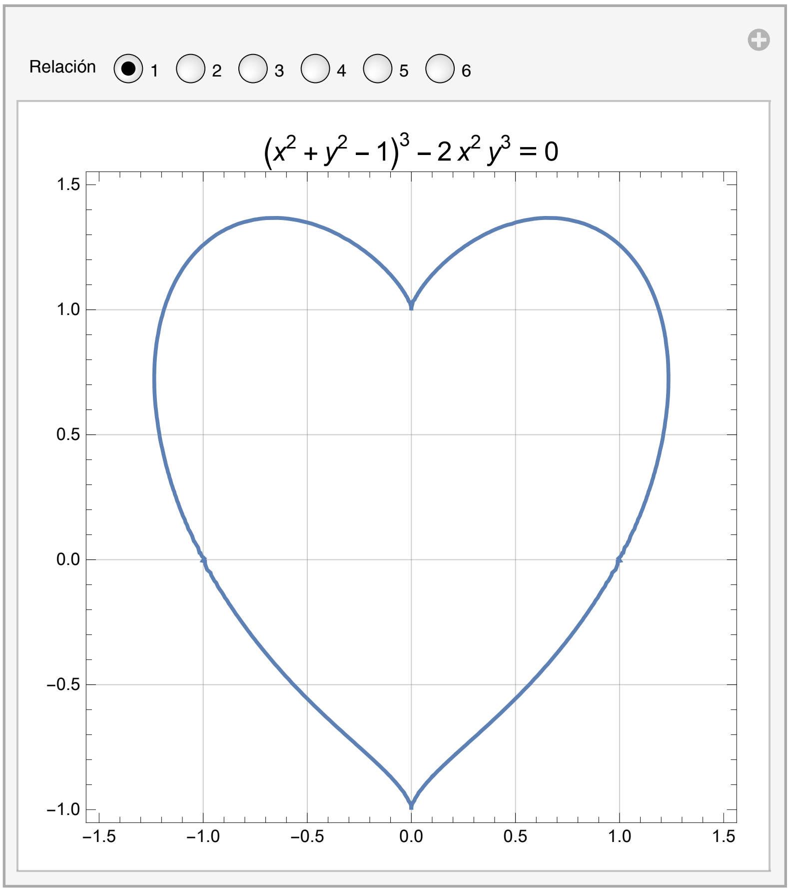
Clase 21

Derivación implícita y logarítmica

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Derivación implícita

Cualquier ecuación en términos de x, y genera una gráfica implícita, que generalmente no se puede representar mediante una función de y o x.

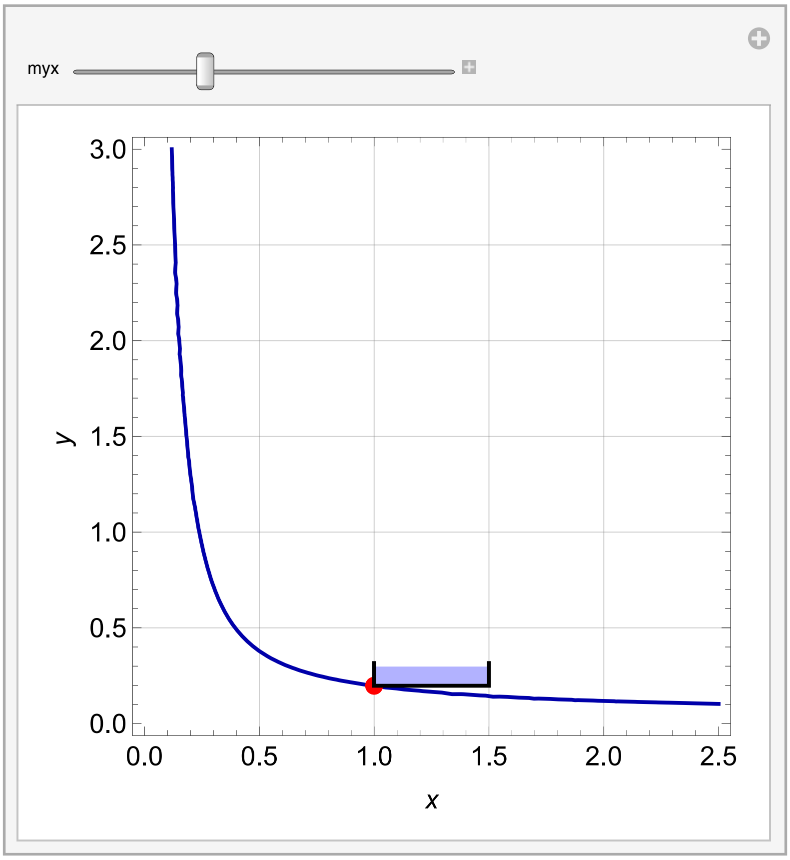


En aplicaciones también se encuentran muhas relaciones asi. Por ejemplo para un canal de sección transversal rectangular con base x y profundidad y, el caudal Q está dado por

$$Q = \frac{\sqrt{S}}{n} \frac{(y\,x)^{5/3}}{(2\,y + x)^{2/3}},$$

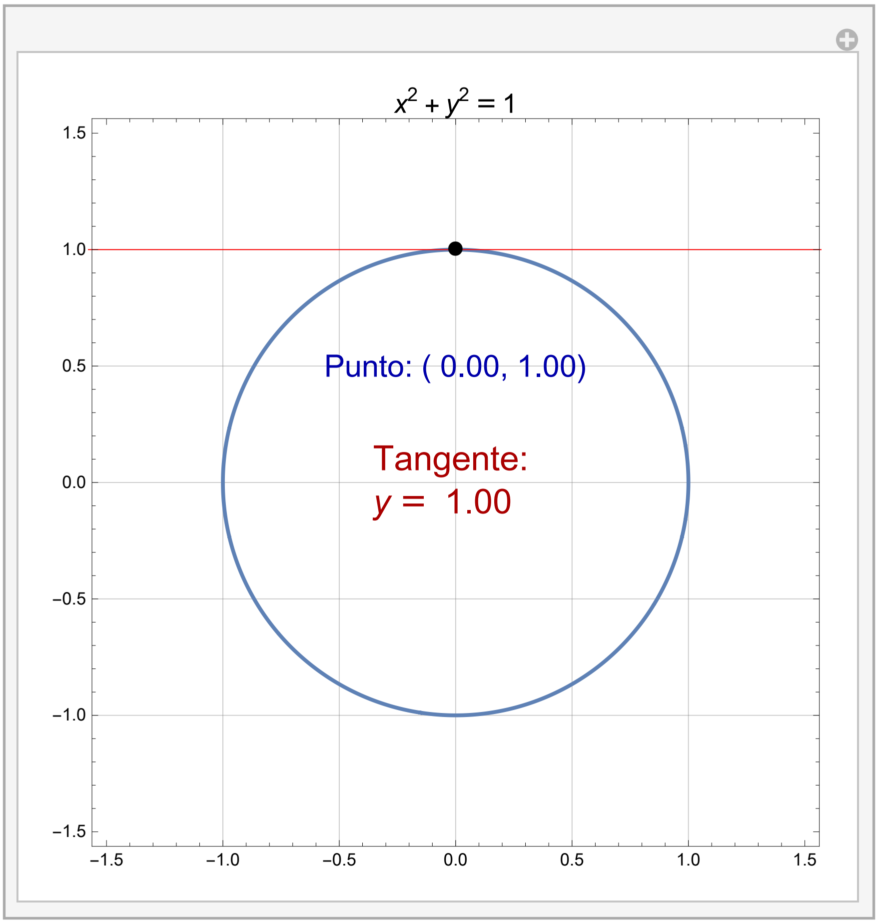
donde S es la pendiente del canal y n es el coeficiente de fugosidad Manning (≈ 0.012 para concreto). Si Q, n, S están dados, uno quisiera expresar la profundidad y del canal como función del ancho x. Esto sinembargo es demasiado engorroso en este caso. Y es mejor trabajar con la relacion implicita.

En la demostración se muestran todas las secciones transversales (combinaciones (x, y)) que transportan un caudale de $Q = 1\, m^3 / s$, sobre concreto a una pendiente de $S = 5\,\%$.



El problema

Encontrar la tasa de cambio de y con respecto a x en un punto (x, y) que satisfaga la relación.
En caso de una gráfica, queremos hallar y' en (x, y): la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (x, y).
En la demostración, mueva el punto negro sobre el círculo para visualizar la ecuación de la recta tangente.



La solución:

Para hallar y' se escribe la ecuación:

$$y^2(x) + x^2 = 1$$

y se diferencia con respecto a x usando la regla de la cadena:

$$2\,y(x)\,y'(x) + 2\,x = 0$$

y se despeja $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{-x}{y}$$

Esto únicamente tiene sentido para parejas (x, y) que satisfagan $x^2 + y^2 = 1$. Entonces se evalúa $y'(x)$ en el **punto** de interés:

$$y'(x)\,|_{(0,1)} = 0, \quad y'(x)\,|_{(0,-1)} = 0, \quad \ldots$$

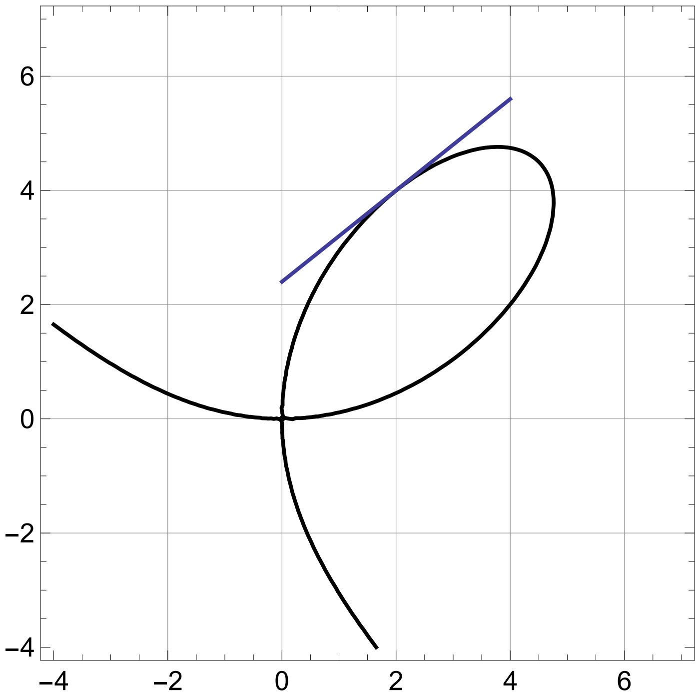
Ejemplos:

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta tangente en los puntos dados

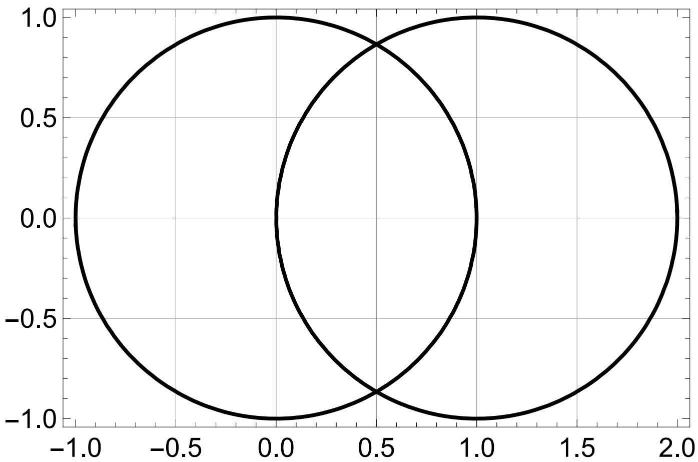
$$x^3 + y^3 - 9\,x\,y == 0, \quad x = 2\,, \quad x = 0$$

```
Show[
 ContourPlot[x^3 + y^3 - 9 x y == 0, {x, -4, 7}, {y, -4, 7},
  ContourStyle → Thick, GridLines → Automatic , LabelStyle → 14],
 Plot[4 + 0.8 (x - 2), {x, 0, 4}]
]
```



Ejemplo

Halle el ángulo de intersección entre los dos círculos:



Ejemplo

Hallar el mejor diseño de la canaleta. Este es el que tiene $y'(x) = -1$.
(En este punto, los errores en que se cometan en el ancho, producen errores comparables en el largo.)

$$0 == D\left[\frac{\sqrt{S}}{n}\ \frac{(y[x]\ x)^{5/3}}{(2\ y\ [x] + x)^{2/3}},\ x\right]$$

```
Simplify[- 2 √S (x y[x])^(5/3) (1 + 2 y′[x]) / (3 n (x + 2 y[x])^(5/3)) + 5 √S (x y[x])^(2/3) (y[x] + x y′[x]) / (3 n (x + 2 y[x])^(2/3)) /.
  {y[x] → y, y'[x] → -1}]

With[{Q = 1, n = 0.012, S = 0.05},
 NSolve[{0 == - √S (x y)^(2/3) (5 x^2 + 3 x y - 10 y^2) / (3 n (x + 2 y)^(5/3)), Q == √S/n (y x)^(5/3)/(2 y + x)^(2/3)}, {x, y}, Reals]]
```

NSolve::ratnz : NSolve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

```
{{x → 0.467966, y → 0.40846}}
```

Derivación logarítmica

$$f(x) = g(x)^{h(x)}$$

$$\ln(f(x)) = h(x)\ln(g(x))$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = h(x)\frac{1}{g(x)} g'(x) + h'(x)\ln(g(x))$$

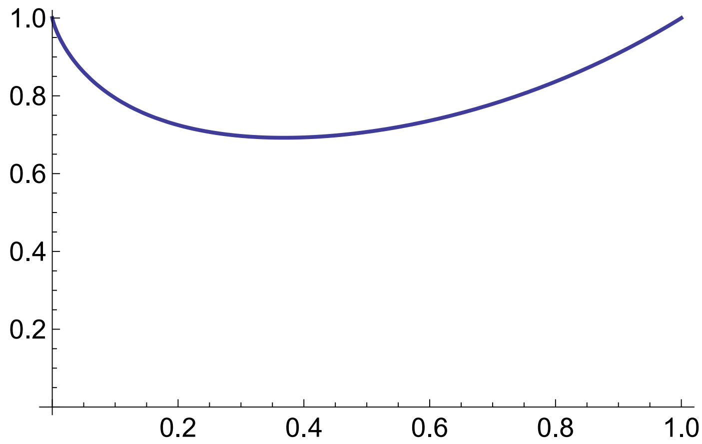
$$f'(x) = f(x)\left(h(x)\frac{1}{g(x)} g'(x) + h'(x)\ln(g(x))\right)$$

$$f'(x) = g(x)^{h(x)}\left(h(x)\frac{1}{g(x)} g'(x) + h'(x)\ln(g(x))\right)$$

Ejemplo

$$f(x) = x^x$$

```
Plot[x^x, {x, 0, 1}]
```

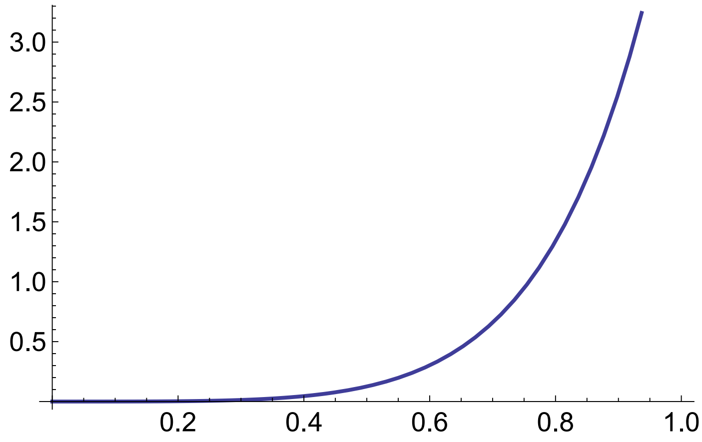


Ejemplo

$$f(x) = \frac{x^5 e^x (4x+3)}{5^{\ln(x)} (3-x)^2}$$

```
Plot[x^5 E^x (4 x + 3)/(5^Log[x] (3 - x)^2), {x, 0, 1}]
```

$$\texttt{Plot}\left[\frac{x^5 e^x (4x+3)}{5^{\text{Log}[x]} (3-x)^2}, \{x, 0, 1\}\right]$$



Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.