Clase 27

Problemas de optimización

Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Estrategia

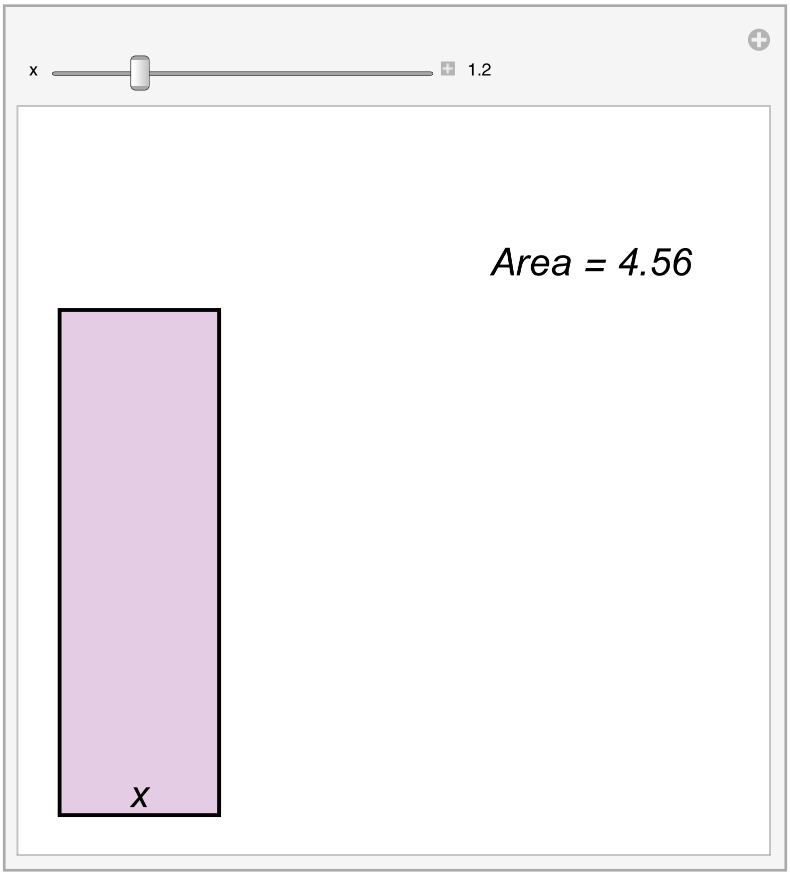
- Lea, dibuje, entienda
- Identifique qué le piden optimizar. Esa es su función objetivo f.
- Convenzace de que debe exisitir un óptimo y trate de adivinar cuál debe ser.
- Identifique una variable x. Tiene que ser una que produzca todos los valores posibles de f.
- Exprese f en función de x únicamente, e identifique las restricciones de x.
- Escriba el problema de la forma:

$$\max f(x), \quad x \in I$$

- Use el teorema del intervalo cerrado si es posible.
- Halle puntos críticos y determine cuál es el óptimo global, si lo hay.

Ejemplo básico

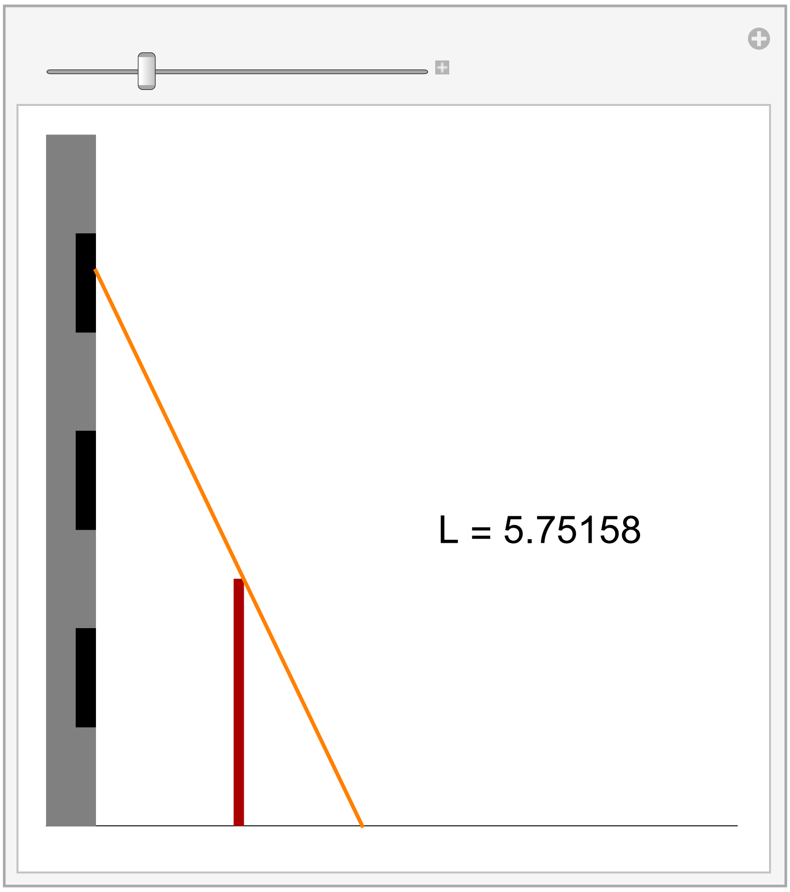
Halle las dimensiones del rectángulo con périmetro 10 cm que tiene área máxima.



Ejemplos

Un muro de 2.5 se encuentra a 1.5 metros de la base de un edificio. Hallar la longitud mínima de la escalera para llegar a una altura entre 4 y 6 metros.

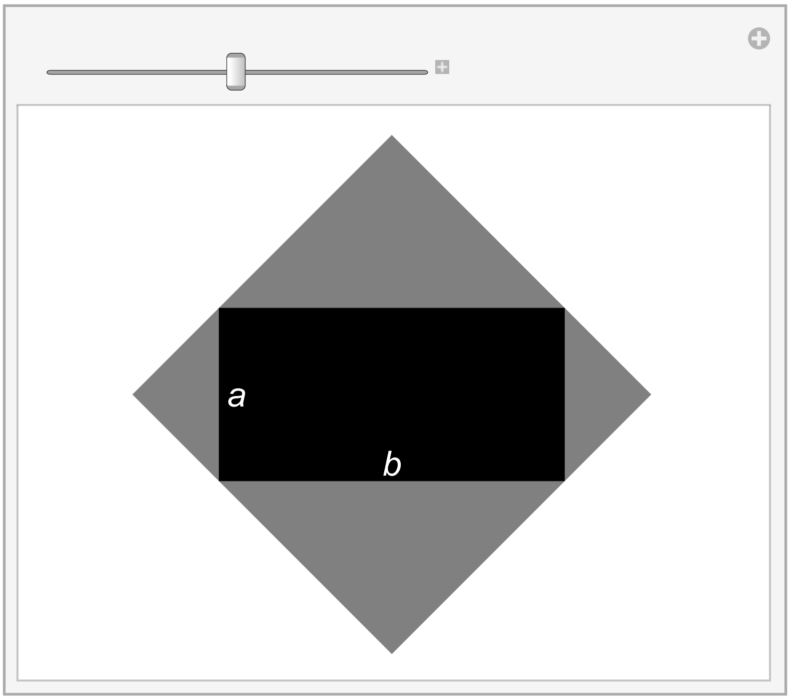
Escalera



$$L[x\_] := \sqrt{\left(2.5\,\frac{1+x}{x}\right)^2 + (x+1)^2};$$

Rectángulo circunscrito

Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede circunscribir en un rectángulo de dimensiones $a \times b$.



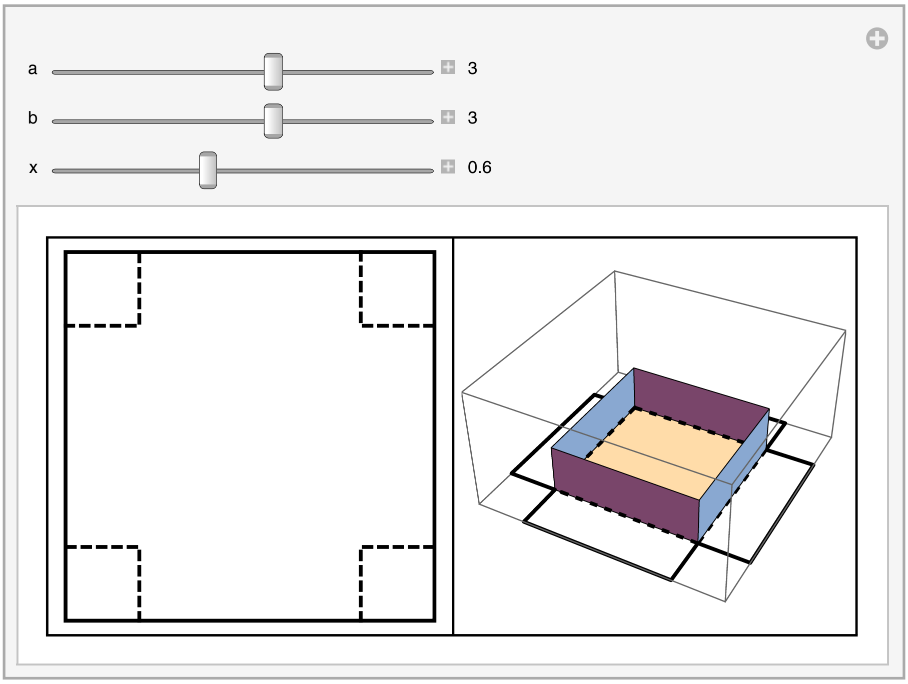

```
Aa[θ_] := (b Sin[θ] + a Cos[θ]) (b Cos[θ] + a Sin[θ]);
```

Venta de gomitas y estudio de mercadeo

Suponga que queremos vender gomitas. Cada gomita nos cuesta a nosotros $15. Tenemos que determinar a cuánto vendemos cada gomita para maximizar nuestra ganancia. Hacemos un estudio de mercadeo usando dos precios: $50 y $100 y registrando cuánto se vende por cada día. Hallar el precio óptimo.

Construir una caja

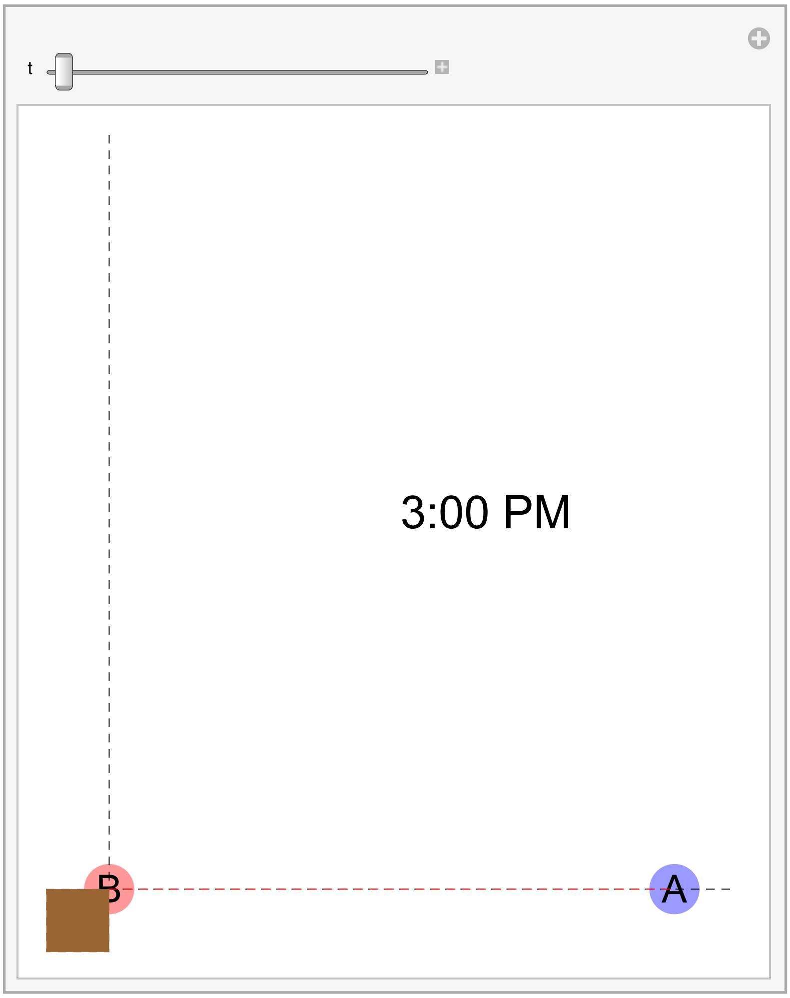
Hallar la forma de construir, a partir de un rectángulo de 3×3, una caja de base cuadrada y sin tapa, de forma que tenga volumen máximo.




```
Vc[x_] := x (3 - 2 x)^2;
```

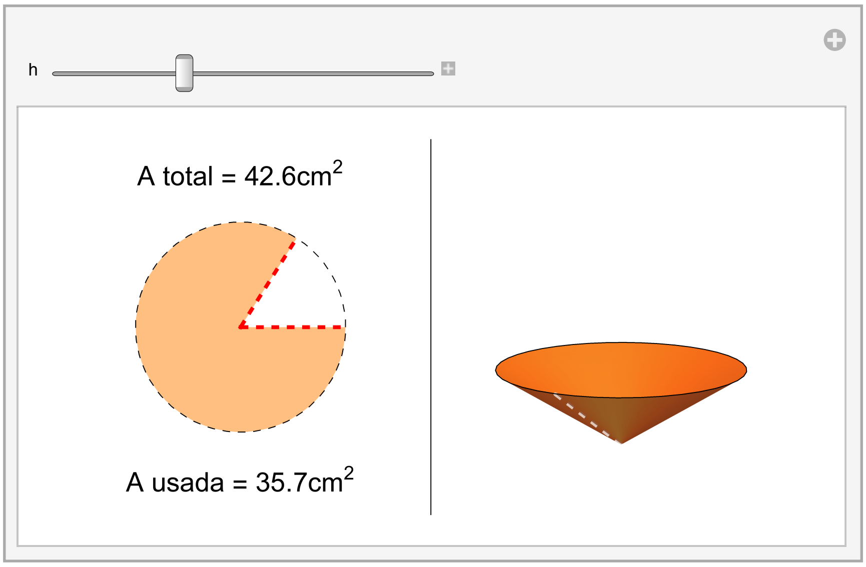
Los barcos

Un barco sale de un muelle a las 2PM y viaja hacia el norte con una velocidad de 20 Km/h. Otro barco ha estado navegando con rumbo al oeste con una velocidad de 15 Km/h, de manera que llega al muelle a las 3 PM. Halle a qué hora estuvieron más cerca de sí los barcos.



Un cono de papel

Se construye un cono de papel a partir de un círculo de radio *R*. Halle las dimensiones del cono con Volumen igual a 20 cm^3, pero que use el círculo más pequeño posible.

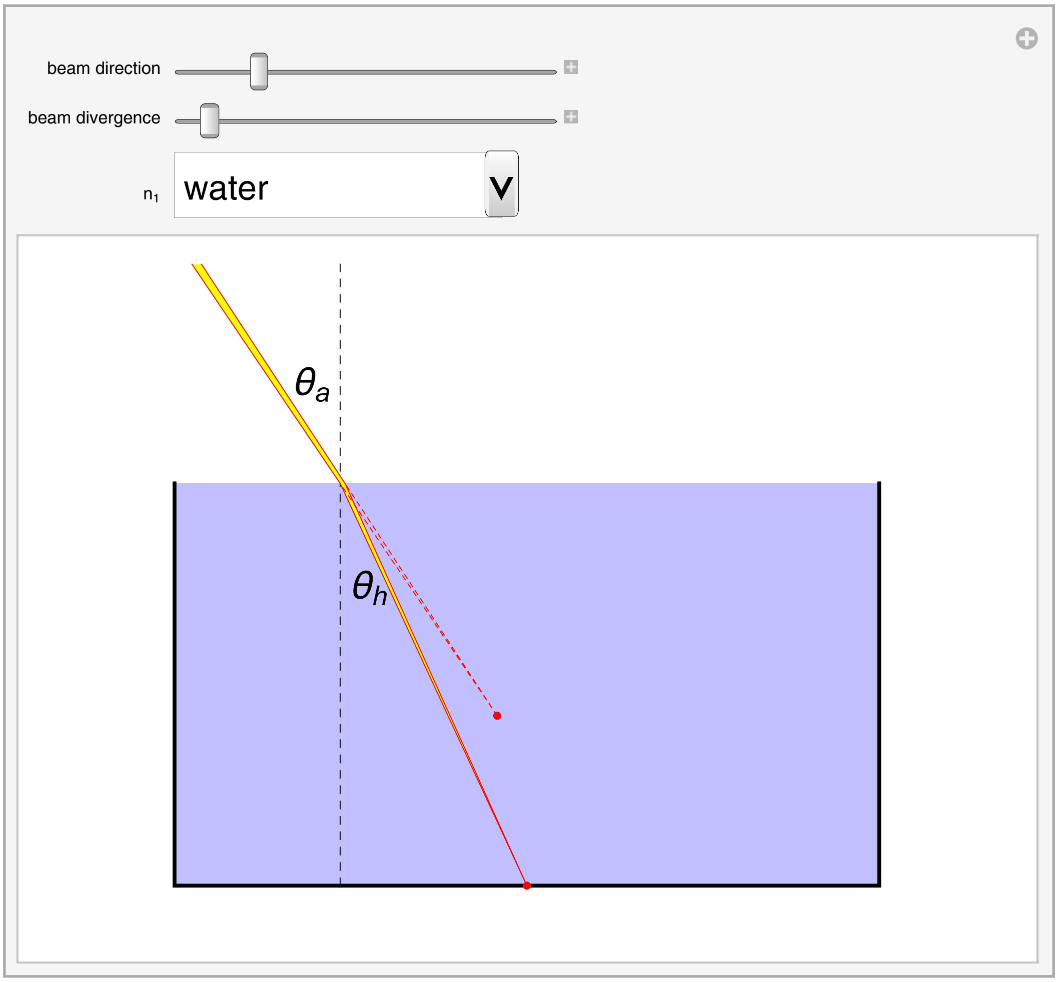


Refracción de la luz y la ley de Snell

Un rayo de luz que sale del fondo de un recipiente lleno de agua se quiebra al cruzar la superficie del agua. Sea θ_f ángulo que forma el rayo con la vertical antes de salir del agua, y θ_a el ángulo con el que entra. Se sabe que la luz viaja en la trayectoria que minimice el tiempo total. Demuestre la ley de Snell:

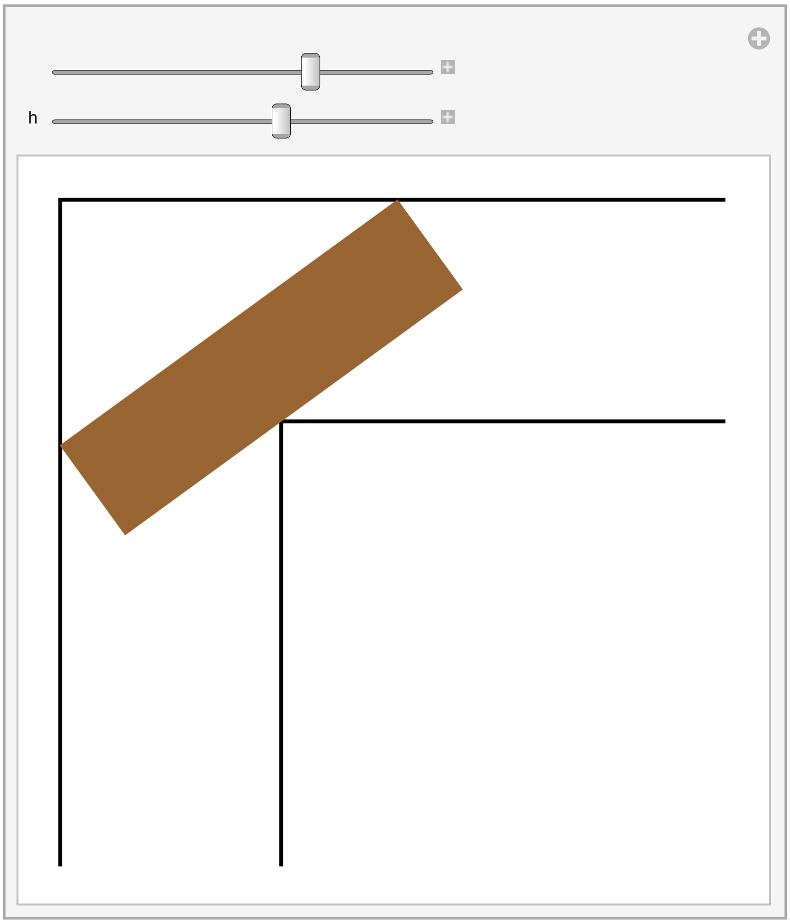
$$\frac{\mathrm{sen}(\theta_a)}{\mathrm{sen}(\theta_f)} = \frac{c_a}{c_h} = k \approx \frac{4}{3}$$

donde c_ay c_h denotan las velocidades de la luz en el aire y el agua respectivamente.

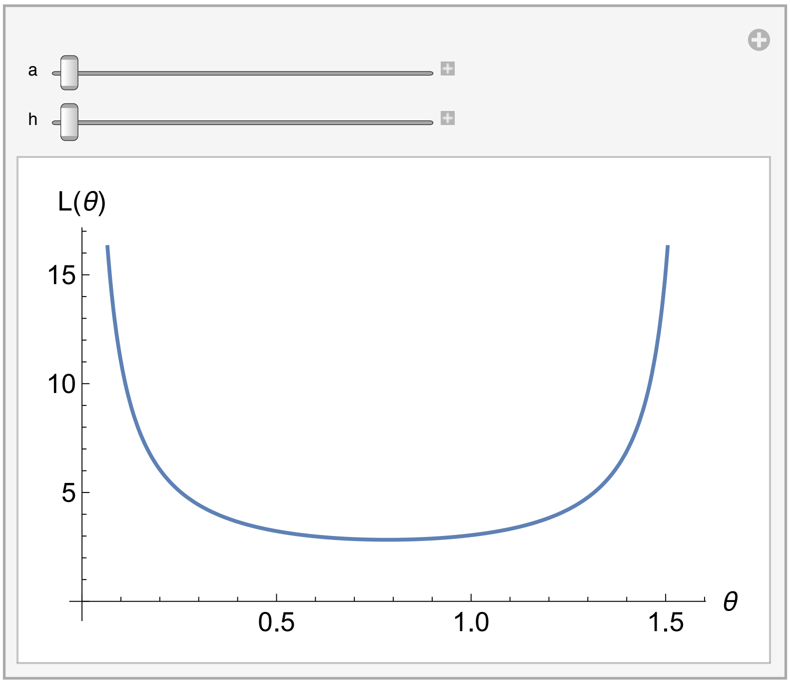


La tabla más grande que se puede pasar por una esquina

Dos corredores de *a* centímetros de ancho forma una esquina recta. Halle la longitud del sofá de ancho *h* más largo que se puede pasar por la esquina.



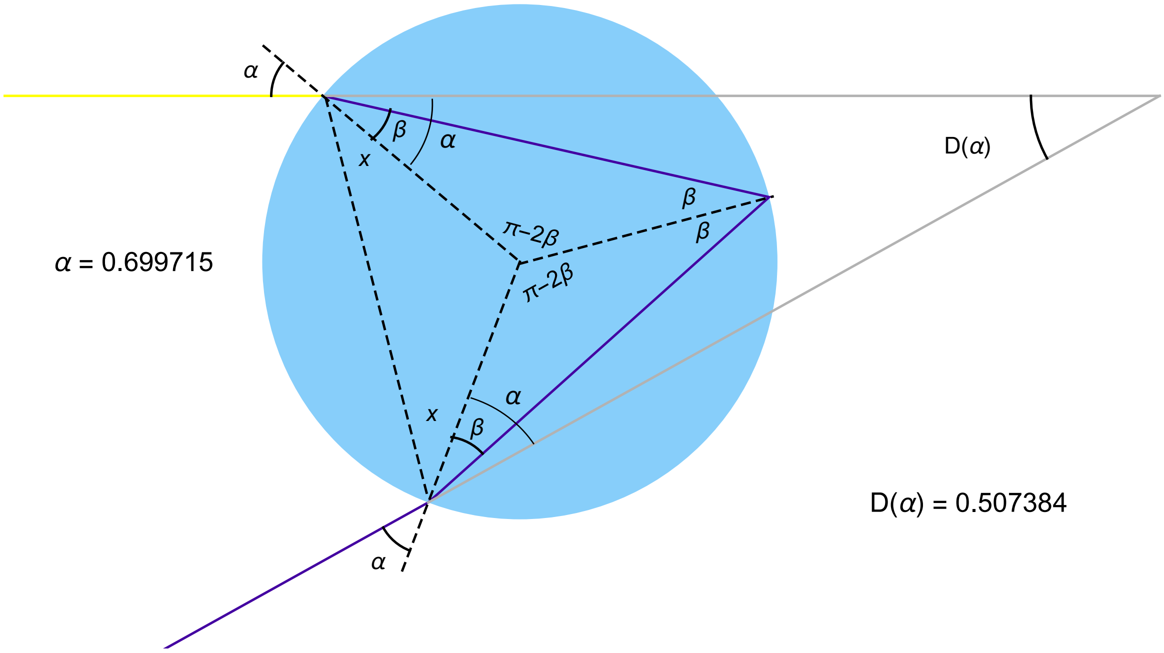
$$L[\theta\_] := \frac{a}{\text{Sin}[\theta]} - \frac{h}{\text{Tan}[\theta]} + \frac{a}{\text{Cos}[\theta]} - h\,\text{Tan}[\theta];$$



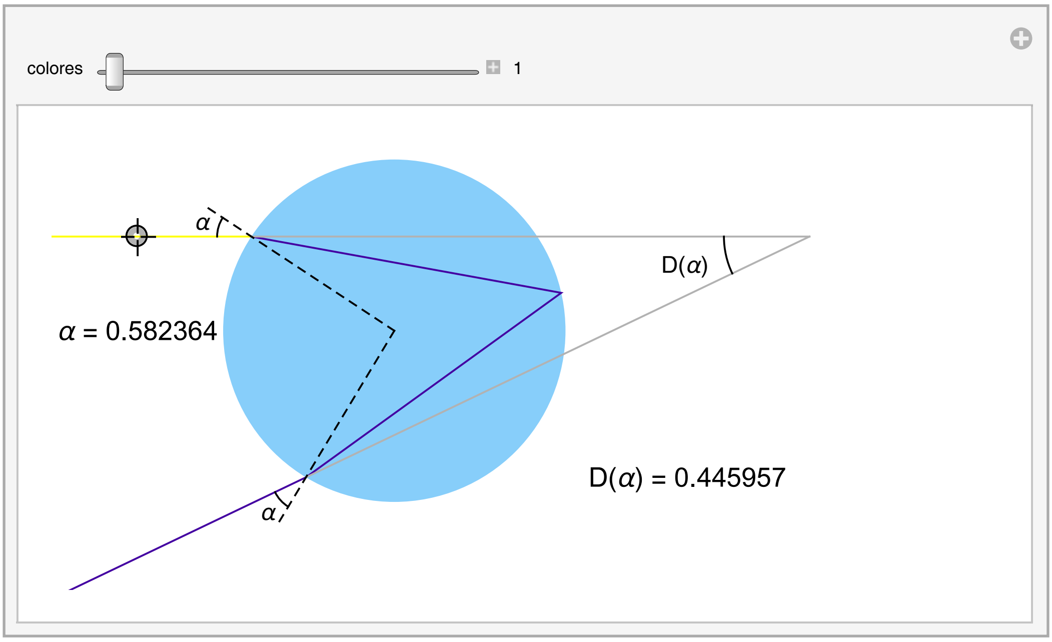
El ángulo y la forma del arcoiris

El arcoiris se forma por la reflexión y difraccíón de los rayos del sol en las gotas de agua suspendidas en el aire.
Si un rayo de luz entra a la parte superior de una gota, formando un ángulo α con la horizontal, el rayo que sale en la parte inferior forma un ángulo $D(\alpha)$ con la horizontal. Por la ley de Snell, sabemos que $\text{sen}(\alpha) = k\,\text{sen}(\beta)$ con $k \approx 4/3$.
Para hallar $D(\alpha)$, note que

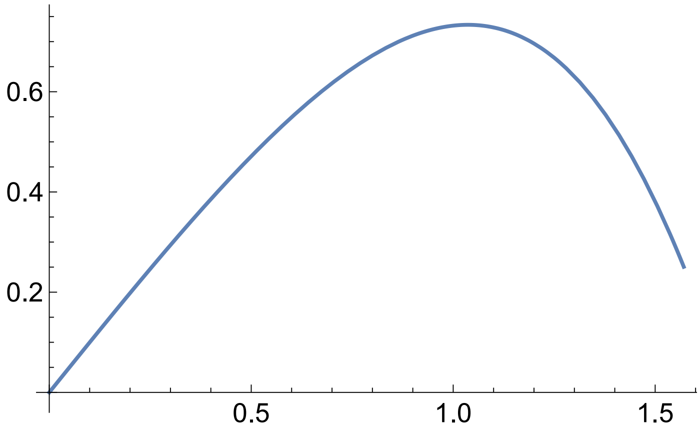
$$2\,(x+\alpha) + D(\alpha) = \pi$$
$$2\,x + 2\,\pi - 2\,(\pi - 2\,\beta) = \pi$$
$$\Longrightarrow x = \tfrac{\pi - 4\,\beta}{2},\ \ \text{sen}(\beta) = \tfrac{3}{4}\,\text{sen}(\alpha)$$
$$D(\alpha) = 4\,\beta - 2\,\alpha\ =\ 4\,\text{sen}^{-1}\!\left(\tfrac{3}{4}\,\text{sen}(\alpha)\right) - 2\,\alpha$$



Pero la luz pega en todos los puntos de la parte superior de la gota, y el ánglo α toma todos loa valores en $[0,\ \pi/2]$, y hay un α que maximiza $D(\alpha)$.



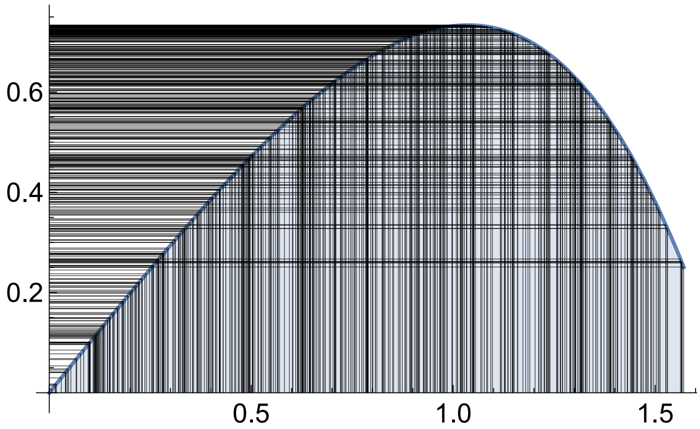

```
DD[α_] := 4 ArcSin[3/4 Sin[α]] - 2 α;
Plot[DD[α], {α, 0, π / 2}]
```



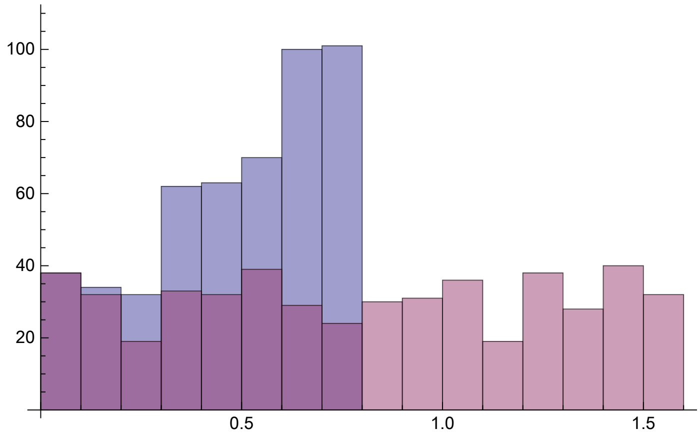

```
αs = α /. N@Quiet@Solve[DD'[α] == 0, α]⟦2⟧
```

```
1.03657
```

El máximo ángulo es $D(\alpha^*) \approx 42$ grados. El máximo siempre tiene la siguiente propiedad: si α toma todos los valores posibles, entonces $D(\alpha)$ va a tomar valores cercanos a $D(\alpha^*)$ con mayor frecuencia:

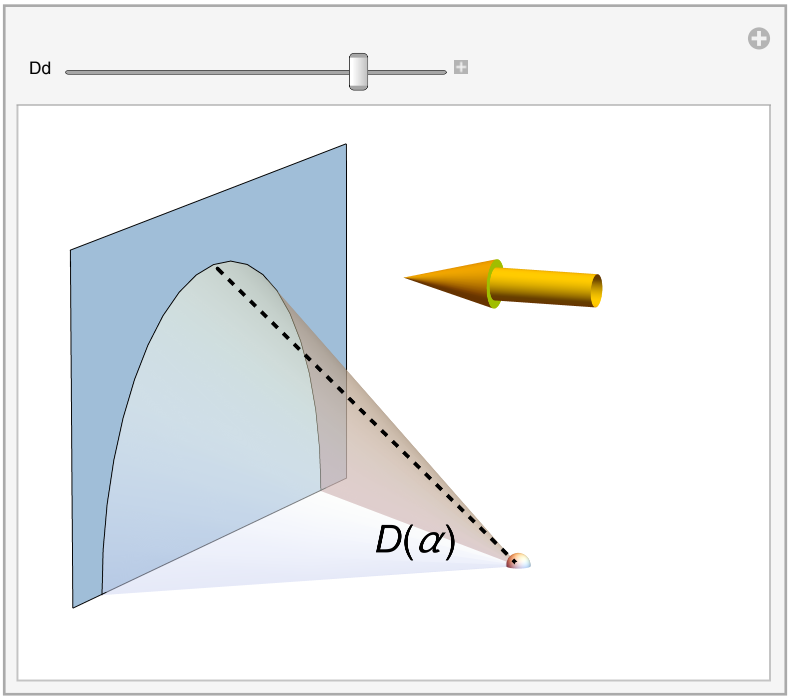



```
Histogram[{DD[αis], αis}, 20]
```



El arcoiris es entonces la mitad de un arco circular. Si L es la distancia del observador a las gotas de agua, el radio del arcoiris es

$$R = L \sin(D(\alpha^*)) \;=\; 0.669\,L \;\approx\; \frac{2}{3}\,L$$



Jorge Ramirez,
Escuela de Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.